GIPAD – GS2
Recherche Opérationnelle – devoir final

15 janvier 2009

durée : 2 heures
documents autorisés : aucun
barème : Problème 1 (8 points), Problème 2 (12 points) et questions bonus (marquées *).

Problème 1 *Trois conteneurs de bouteilles en verre usagées sont amenés dans une usine de recyclage. Les bouteilles sont de 3 types : en verre brun, en verre vert ou en vert blanc. On connaît le nombre de bouteilles de chaque type contenues dans chaque conteneur. Pour le recyclage, les conteneurs doivent être triés de sorte que chaque conteneur ne contienne qu'un seul type de verre. L'objectif est de minimiser le nombre de déplacements des bouteilles. On considèrera 2 cas :*

Premier cas *Les conteneurs sont de capacité infinie :*

Q1.1. (3) montrer qu'il s'agit d'une instance d'un problème d'optimisation combinatoire connu ;

Q1.2. (1) donner et justifier la complexité du problème.

Second cas *Les conteneurs sont de capacités finies, supérieures chacunes au nombre total de bouteilles de chaque type :*

Q1.3. (1) exhiber un cas d'irréalisabilité ;

Q1.4. (1) proposer une borne inférieure ;

Q1.5. (2) décrire un algorithme heuristique de résolution ;

Q1.6. (*) proposer et justifier un modèle de programmation linéaire.

Problème 2, page suivante →

Problème 2 *Une chaîne de télévision privée doit planifier les spots publicitaires commandés par ses clients (les annonceurs) sur un ensemble de créneaux horaires réservés. Chaque créneau est défini par son heure de début et possède une durée maximale. Chaque spot publicitaire est spécifié par sa durée. La durée d'un spot est inférieure aux durées maximales des créneaux. Chaque spot doit être planifié intégralement sur un et un seul créneau. On dira qu'un créneau publicitaire est* planifié *si au moins un spot est planifié sur ce créneau et on appelera* durée de diffusion *d'un créneau planifié la somme des durées des spots qui sont planifiés sur ce créneau.*

Q2.1. (1) Donner une condition nécessaire de réalisabilité de la planification. Cette condition est-elle aussi suffisante ?

On suppose que ce problème de planification admet au moins une solution réalisable. La chaîne de télévision propose de simuler les « meilleures » planifications suivant différents critères :

Critère 1. *On cherche à réduire le nombre de créneaux planifiés ;*

Q2.2. (1) qualifier le problème et donner sa complexité ;

Q2.3. (1) proposer un modèle compact de programmation linéaire ;

Q2.4. (2) reformuler en une instance du problème de set-partitionning.

Critère 2. *On cherche à minimiser la durée de diffusion maximale des créneaux planifiés ;*

Q2.5. (*) proposer un modèle de programmation linéaire.

Critère 3. *On cherche à minimiser la durée de diffusion moyenne des créneaux planifiés ;*

Q2.6. (1) montrer qu'optimiser ce critère revient à maximiser le nombre spots planifiés ;

Q2.7. (1) exprimer le nombre maximal de spots planifiés en fonction du nombre de spots et du nombre de créneaux prévus ;

Q2.8. (1) déduire la durée de diffusion moyenne des créneaux planifiés.

Critère 4. *On sait estimer l'audience moyenne pour chaque créneau horaire ; on cherche à planifier en priorité les créneaux de forte audience.*

Q2.9. (1) proposer un modèle de programmation linéaire ;

On suppose maintenant que les spots commandés ne pourront éventuellement pas tous être diffusés sur les créneaux prévus. La chaîne de télévision met en place alors un système d'enchères auprès de ses clients : elle spécifie un coût pour l'annonceur pour la diffusion de son spot publicitaire. Ce coût dépend de la durée du spot publicitaire et de l'audience attendue sur le créneau de diffusion. Quel est le gain financier maximal pour la chaîne de télévision ?

Q2.10. (2) qualifier le problème et donner sa complexité ;

Q2.11. (1) proposer un modèle de programmation linéaire.

Correction Problème 1.

Capacité infinie : problème d'affectation de $I = \{V, B, T\}$ (couleurs) dans $J = \{1, 2, 3\}$ (conteneurs) de coût minimal où le coût c_{ij} est le nombre de bouteilles de couleur i contenues initialement dans les conteneurs autres que j.
La matrice du programme linéaire est unimodulaire. Le problème peut être résolu en temps polynomial par l'algorithme hongrois.
Capacité finie : problème de multi-flot + affectation. $f^i_{jj't}$ = le nombre de bouteilles de couleurs i passant du conteneur j au conteneur j' au temps t. $y_{ij} = 1$ si et seulement si le conteneur j contient la couleur i au temps final t_f. $c_{jj'} = 1$ si et seulement si $j \neq j'$. On note a_{ij} la quantité de bouteilles de couleur i contenues initialement dans le conteneur j, $a_i = \sum_{j\in J} a_{ij}$ et C_j la capacité du conteneur j.

$$\min \sum_i \sum_t \sum_{j\neq j'} c_{jj'} f^i_{jj't} \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \sum_{j'\in J} f^i_{jj'1} = a_{ij} \qquad \forall i \in I, \forall j \in J, \tag{2}$$

$$\sum_{j'\in J} f^i_{j'jt_f} = a_i y_{ij} \qquad \forall i \in I, \forall j \in J, \tag{3}$$

$$\sum_{i\in I} \sum_{j'\in J} f^i_{jj't} \leqslant C_j \qquad \forall j \in J, \forall t = 1..t_f, \tag{4}$$

$$\sum_{j'\in J} f^i_{j'jt} = \sum_{j'\in J} f^i_{jj'(t+1)} \qquad \forall i \in I, j \in J, t = 1..t_f - 1, \tag{5}$$

$$\sum_{j\in J} y_{ij} = 1 \qquad \forall i \in I, \tag{6}$$

$$\sum_{i\in I} y_{ij} = 1 \qquad \forall j \in J, \tag{7}$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall i \in I, j \in J, \tag{8}$$

$$f^i_{jj't} \in \mathbb{Z}_+ \qquad \forall i \in I, (j, j') \in J, t = 1..t_f. \tag{9}$$

Le problème est irréalisable si et seulement si $C_j = \sum_{i\in I} a_{ij}$ pour tout j, et il existe j tel que $a_{ij} > 0$ et $a_{i'j} > 0$. Une borne inférieure du nombre de déplacement est $\sum_{k=1}^{3} c_{i_k j_k}$ si la couleur i_k est affectée au conteneur j_k (la solution optimale du cas de capacité infinie).
Une heuristique :

- on commence par déterminer l'affectation ($i_k \to j_k$) des couleurs aux conteneurs à partir de la solution optimale du cas de capacité infinie.
- $z = 0$
  TANT QUE $K = \{k \mid c_{i_k j_k} > 0\}$ est non vide
  SI il existe $k \in K$ tel que $C_{j_k} > \sum_{i\in I} a_{ij_k}$
  ALORS il existe $h \neq k$ tel que $a_{i_k j_h} > 0$
  on pose $u = \min\{a_{i_k j_h}, C_{j_k} - \sum_{i\in I} a_{ij_k}\}$, $i = i_k$, $j = j_h$, $j' = j_k$
  SINON il existe $k \notin K$ tel que $C_{j_k} > \sum_{i\in I} a_{ij_k}$ et $K = \{h, l\}$ tels que $C_j = \sum_{i\in I} a_{ij}$
  on pose $u = \min\{a_{i_l j_h}, C_{j_k} - \sum_{i\in I} a_{ij_k}\}$, $i = i_l$, $j = j_h$, $j' = j_k$
  $a_{ij} = a_{ij} - u$
  $a_{ij'} = a_{ij'} + u$
  $z = z + u$
  FIN TANT QUE
  RETURN z

Correction Problème 2.

La durée des spots étant inférieure à la durée des créneaux, il est possible de planifier tout spot sur n'importe quel créneau. Si le problème est réalisable alors $\sum_i w_i \leqslant \sum_j c_j$. En revanche, cette condition n'est pas suffisante, puisqu'on a le contre-exemple suivant : $w_1 = w_2 = w_3 = 2$ et $c_1 = c_2 = 3$.

Critère 1. c'est un problème de bin-packing (NP-difficile) avec :
- J les conteneurs (créneaux) de capacité c_j (durée) ;
- I les items (spots) de poids w_i (durée) ;

$$\min \sum_j y_j \quad \text{s.t.} \quad \sum_i w_i x_{ij} \leqslant c_j y_j \ (\forall j \in J), \ \sum_j x_{ij} = 1 \ (\forall i \in I), \quad x_{ij} \in \{0,1\}, \ y_j \in \{0,1\}.$$

avec :
- $x_{ij} = 1$ si et seulement si le spot i est planifié sur le créneau j
- $y_j = 1$ si et seulement si le créneau j est planifié

Modèle de set-partitionning $y_{jl} = 1$ si et seulement si le créneau j est affecté à l'ensemble des spots $l \in L^j$:

$$\min \sum_j \sum_l y_{jl} \quad \text{s.t.} \quad \sum_{l \in L^j} y_{jl} \leqslant 1 \ (\forall j \in J), \ \sum_j \sum_l a_{il} y_{jl} = 1 \ (\forall i \in I), \quad y_{jl} \in \{0,1\}.$$

Le sous-problème consiste à calculer un ensemble l de spots possibles pour le créneau j : $\sum_i a_{il} \leqslant c_j$. Il s'agit d' un problème de knapsack.

Critère 2.

$$\min z \quad \text{s.t.} \quad \sum_i w_i x_{ij} \leqslant c_j \ (\forall j \in J), \ \sum_i w_i x_{ij} \leqslant z \ (\forall j \in J), \ \sum_j x_{ij} = 1 \ (\forall i \in I), \quad x_{ij} \in \{0,1\}, \ z \in \mathbb{R}_+.$$

Critère 3. À toute planification p, correspond une (unique) solution réalisable (x, y) du PL du critère 1. La durée moyenne de diffusion des créneaux planifiés dans p est $\frac{\sum_j \sum_i w_i x_{ij}}{\sum_j y_j} = \frac{\sum_i w_i}{\sum_j y_j}$. Une planification pour laquelle la durée moyenne est minimale est toute solution optimale du programme linéaire suivant :

$$k = \max \sum_j y_j \text{ s.t. } \sum_i w_i x_{ij} \leqslant c_j \ (\forall j \in J), \ \sum_j x_{ij} = 1 \ (\forall i \in I), \sum_i x_{ij} \geqslant y_j \ (\forall j \in J), \ x_{ij}, \ y_j \in \{0,1\}.$$

et la valeur minimale de la durée moyenne est $\frac{\sum_i w_i}{k}$. On montre que $k = \min(|I|, |J|)$:
La durée des spots étant inférieure à la durée des créneaux, il est possible de planifier tout spot sur n'importe quel créneau. Si $|I| < |J|$, maximiser le nombre de créneaux planifiés consiste à planifier exactement un spot sur chaque créneau ($k = |I|$). Sinon, on sait par hypothèse qu'il existe une planification réalisable. Il existe donc une solution optimale au PL précédent. Supposons que $k < |J|$. Comme $|I| \geqslant |J| > k$, il existe un créneau qui contient au moins deux spots. Si on déplace l'un de ces deux spots sur un créneau non planifié, alors on obtient une planification réalisable avec $k + 1$ créneaux planifiés. Par contradiction, $k = |J|$.

Critère 4. Soit $v_j \in \mathbb{Z}_+$ l'audience attendue sur le créneau j :

$$\max \sum_j v_j y_j \text{ s.t. } \sum_i w_i x_{ij} \leqslant c_j \ (\forall j \in J), \ \sum_j x_{ij} = 1 \ (\forall i \in I), \sum_i x_{ij} \geqslant y_j \ (\forall j \in J), \ x_{ij} \in \{0,1\}, \ y_j \in \{0,1\}.$$

Chercher le gain financier maximal pour la chaîne consiste à résoudre un problème de multi-knapsack 0-1 (NP-difficile). Soit $p_{ij} \in \mathbb{Z}_+$ le coût de diffusion du spot i sur le créneau j :

$$\max \sum_i \sum_j p_{ij} x_{ij} \quad \text{s.t.} \quad \sum_i w_i x_{ij} \leqslant c_j \ (\forall j \in J), \ \sum_j x_{ij} \leqslant 1 \ (\forall i \in I), \quad x_{ij} \in \{0,1\}.$$