GIPAD – GS2
Recherche Opérationnelle - APP1
Correction devoir final

6 octobre 2010

---

durée : 3 heures
documents autorisés : aucun.
barème : note sur 20 = nombre de points * 20 / 30

1. Modèle PLNE du TSP (8 points)
2. Graphes, dualité et heuristiques (22 points)

1 ATSP : programmation linéaire en nombres entiers

L'objet de cet exercice est de formuler le TSP asymétrique par un programme linéaire en nombres entiers de taille polynomial. On considère un graphe orienté complet à n sommets, numérotés de 1 à n. Pour tout couple de sommets i et j, il existe deux arcs (i, j) et (j, i) valués respectivement par c_{ij} et c_{ji}. Le problème (P) consiste à trouver un tour (cycle hamiltonien) de coût total minimum.

Question 1 ***(8 points)***
À tout tour T, *on associe un booléen* $x_{ijt} = 1$ *si* (i, j) *est le* t*-ème arc du tour partant du sommet* 1, *et* $x_{ijt} = 0$ *sinon, pour tout triplet* $(i, j, t) \in \{1, \ldots, n\}^3$. *Pour tout arc* (i, j), *on définit l'*ordre S_{ij} *de l'arc dans le tour* T *par :* $S_{ij} = t$ *si* $x_{ijt} = 1$ *et* $S_{ij} = 0$ *sinon.*

Q1.1. Modélisez par des expressions mathématiques linéaires en les x_{ijt} :
– le coût du tour T ;
– la condition : T *visite chaque sommet exactement une fois* ;
– la condition : T *possède un unique arc d'ordre* $t = 1, \ldots, n$;
– l'ordre S_{ij} de l'arc (i, j) dans le tour T ;
– l'ordre E_j de l'arc entrant du sommet j dans le tour T ;
– l'ordre S_i de l'arc sortant du sommet i dans le tour T.

Q1.2. Exprimez la relation entre S_i et E_i pour tout sommet $i \neq 1$.

Q1.3. Modélisez le ATSP par un programme linéaire en nombres entiers de taille polynomiale : $O(n^3)$ variables et $O(n)$ contraintes. Montrez que toute solution réalisable de ce PLNE encode un tour (sans sous-tour propre).

Correction Question 1.

1. le coût du tour correspond à la fonction objectif (1) ; la première condition s'exprime par (2) et (3) ; la seconde condition par (4) ; $S_{ij} = \sum_{t=1}^{n} t x_{ijt}$; $E_j = \sum_{i=1}^{n} S_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} t x_{ijt}$; $S_i = \sum_{j=1}^{n} S_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{t=2}^{n} t x_{ijt}$ si $i \neq 1$ et $S_1 = 1$;
2. $S_i = E_i + 1$ pour tout $i \neq 1$.
3. Toute solution x du PLNE ci-dessous encode bien une permutation sur l'ensemble des sommets. Supposons qu'elle possède un sous-cycle $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$, avec $p \geqslant 2$, ne contenant pas le sommet 1 et soient $t_1, t_2, \ldots, t_p$ l'ordre des arcs $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \ldots, (i_p, i_1)$ respectivement, alors $S_{i_k} - E_{i_k} = t_k - t_{k-1} = 1$ pour tout $k = 2, \ldots, p$ et $S_{i_1} - E_{i_1} = t_1 - t_p = 1$, d'où $t_1 = t_p + 1 = t_{p-1} + 2 = \cdots = t_1 + p$ ce qui est impossible.

$$(P) : \min\ z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} c_{ij} x_{ijt} \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} x_{ijt} = 1 \qquad \forall i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} x_{ijt} = 1 \qquad \forall j = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ijt} = 1 \qquad \forall t = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{1j1} = 1 \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} t x_{ijt} - \sum_{j=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} t x_{jit} = 1 \qquad \forall i = 2, \ldots, n, \tag{6}$$

$$x_{ijt} \in \{0, 1\} \qquad \forall i, j, t = 1, \ldots, n, \tag{7}$$

2 Graphes, dualité et heuristiques

Avertissement : les questions de cette section sont inter-dépendantes, dans le sens où les réponses à certaines questions sont subordonnées aux **énoncés** de questions antérieures. En revanche, elles ne sont par subordonnées aux **réponses** aux questions antérieures.

Question 2 *Un problème de graphe (6 points)*

Problème 2.1. *On considère* $G = (V, E)$ *un graphe non orienté sur un ensemble* V *de sommets, de cardinalité* $n > 0$*, et un ensemble* E *d'arêtes, de cardinalité* $m > 0$*. On définit le programme linéaire en nombres entiers suivant :*

$$(P): \; z = \max \sum_{e \in E} x_e \tag{8}$$

$$s.t. \sum_{e \in E | i \in e} x_e \leqslant 1, \qquad \forall i \in V, \tag{9}$$

$$x_e \in \mathbb{Z}_+, \qquad \forall e \in E. \tag{10}$$

Q2.1. (1) *Montrez que* $x_e \in \{0, 1\}$ *pour toute solution réalisable* x *de* (P) *et pour tout* $e \in E$*.*

Q2.2. (1) *Décrivez ce problème de graphe, donnez son nom usuel et sa classe de complexité.*

Q2.3. (2) *Montrez que* (P) *est réalisable pour tout graphe* G *non vide* ($m > 0$) *et que* $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ *est une borne supérieure pour* (P)*.*

Q2.4. (2) *Montrez que tout* $x^* \in \{0, 1\}^E$ *tel que* $\sum_{e \in E | i \in e} x^*_e = 1$ *pour tout* $i \in V$ *forme une solution optimale de* (P) *et donnez sa valeur objectif. Décrivez une instance* G_1 *de* (P) *qui possède une telle solution. Décrivez une instance* G_2 *de* (P) *qui ne possède pas une telle solution.*

Correction Question 2.

1. x_e est un entier positif d'après (10), et il est inférieur ou égal à 1 car x_e apparaît dans exactement deux inégalités (9), pour chaque extrémité i de e : $x_e \leqslant x_e + \sum_{a \in E | a \neq e, i \in a} x_a \leqslant 1$
2. le problème consiste à sélectionner un sous-ensemble $M \subseteq E$ d'arêtes de G, de taille maximale, tel que tout sommet $i \in V$ appartient à au plus une arête de M. C'est le problème du couplage maximum (*maximum matching*, et non couplage maximal) dans le graphe G. Il appartient à la classe de complexité $\mathcal{P}$; il est par exemple résolvable par l'algorithme polynomial d'Edmonds $O(n^3)$.
3. tout graphe G non vide possède au moins une arête $e \in E$ qui forme à elle seule un couplage $M = \{e\}$ réalisable. En sommant les n inégalités (9), toute solution réalisable x de (P) satisfait la condition $2 \sum_{e \in E} x_e = \sum_{i \in V} \sum_{e \in E | i \in e} x_e \leqslant n$, et comme $\sum_{e \in E} x_e$ est entier, alors $\sum_{e \in E} x_e \leqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. C'est une borne supérieure car toute solution réalisable de (P) – et il en existe au moins une – a un coût inférieur.
4. x^* est nécessairement réalisable dans (P) car elle satisfait (9) et (10) et $\sum_{e \in E} x^*_e = \frac{1}{2} \sum_{i \in V} \sum_{e \in E | i \in e} x^*_e = \frac{n}{2}$, ce qui est supérieur ou égal à la borne supérieur $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. x^* est donc nécessairement optimale. De plus, on en déduit que tout graphe G ayant un nombre impair n de sommets ne peut posséder de telle solution (autrement sa valeur objective serait strictement supérieure à la borne supérieure). Inversement tout graphe complet de taille n paire possède une telle solution, par exemple : $x_e = 1$ pour tout $e = (i, n + i)$ avec $i = 1, \ldots, n/2$, et $x_e = 0$ sinon.

Question 3 ***Dualité (7 points)***

Problème 3.1. *Une municipalité souhaite placer des hauts-parleurs à certaines intersections de rues de sorte que : (i) chaque tronçon de rue – entre deux intersections – soit couverte par au moins un haut-parleur, et (ii) le nombre de haut-parleurs soit minimal.*

Q3.1. (1) *Proposez une modélisation graphique de ce problème. Donnez le nom usuel de ce problème de graphe et sa classe de complexité. Comme pour le problème 2.1, on notera* $G = (V, E)$ *le graphe (non vide) soujacent à une instance générale du problème 3.1.*

Q3.2. (1) *Modélisez le problème 3.1 par un programme linéaire en nombres entiers, noté* (D). *On note* u *la valeur optimale* (D).

Q3.3. (2) *Décrivez le programme linéaire dual de* (P).

Q3.4. (1) *Montrez que la valeur optimale* z *de* (P) *est inférieure ou égale à celle* u *de* (D).

Q3.5. (2) *En considérant la classe des graphes complets* $\mathbb{K}^n$, *montrez que l'écart de dualité* $u - z$ *n'est par borné par une constante.*

Correction Question 3.

1. Soit $G = (V, E)$ le graphe non-orienté formé par V l'ensemble des intersections de rues, et E l'ensemble des tronçons de rue, il s'agit de sélectionner un sous-ensemble $C \subseteq V$ de sommets de G, de taille minimale, tel que toute arête $e \in E$ possède au moins l'une des ses extrémités dans C. C'est le problème du transversal (ou couverture de sommets) minimum. Il appartient à la classe de complexité $\mathcal{NP}$-difficile.
2. Un sous-ensemble de sommets C peut être encodé de manière unique par un ensemble de booléens $s \in \{0,1\}^V$ avec $s_i = 1$ ssi le sommet $i \in V$ appartient à C. C est un transversal ssi il satisfait les inégalités (12) et sa cardinalité est égale à (11) :

$$(D) : u = \min \sum_{i \in V} s_i \tag{11}$$

$$\text{s.t. } s_i + s_j \geqslant 1 \qquad \forall (i,j) \in E, \tag{12}$$

$$s_i \in \mathbb{Z}_+ \qquad \forall i \in V, \tag{13}$$

   Toute solution optimale s de (D) est binaire, car autrement il existerait une solution s' définie par $s'_i = 1$ si $s_i > 0$ et $s"_i = s_i = 0$ réalisable et de coût strictement inférieur.
3. Le dual $(\bar{P})$ de (D) est la relaxation continue de (P), et inversement le dual $(\bar{D})$ de (P) est la relaxation continue de (D).
4. Le théorème de la dualité forte s'applique aux deux PL $(\bar{P})$ et $(\bar{D})$ et $(\bar{P})$ est réalisable car (P) est réalisable, donc $(\bar{D})$ est aussi réalisable et leurs optimaux $\bar{z}$ et $\bar{u}$ coincident. Donc $z \leqslant \bar{z} = \bar{u} \leqslant u$.
5. Si G est le graphe complet $\mathcal{K}^n$ avec $n > 1$, alors $u \geqslant n - 1$. En effet, s'il existe deux sommets distincts de G qui n'appartiennent pas à un transversal de C alors l'arête entre ces deux sommets ne seraient pas couverte par C. Inversement $u \leqslant n - 1$ puisque, pour tout $i \in V$, $V \setminus \{i\}$ est un transversal. Ainsi, l'écart de dualité $u - z = n - 1 - z \geqslant \frac{n-1}{2}$ est non nul pour un tel graphe complet $\mathcal{K}^n$ et il est arbitrairement grand quand n augmente.

Question 4 *Heuristiques (9 points)*

Q4.1. (2) *Proposez un algorithme constructif glouton pour le problème 3.1. (décrivez les heuristiques d'initialisation, de sélection et d'insertion).*

Q4.2. (1) *Exhibez une classe d'instances pour lesquelles cet algorithme retourne la valeur optimale.*

Q4.3. (2) *Soit* $x \in \{0,1\}^E$ *une solution optimale de* (P) *et soit* $y \in \{0,1\}^V$ *défini par :* $y_i = 1$ *pour tout sommet* $i \in V$ *appartenant à au moins une arête* $e \in E$ *telle que* $x_e = 1$, *et* $y_i = 0$ *sinon. Montrer que* y *est une solution réalisable de* (D).

Q4.4. (2) *Montrez que la valeur de la solution* y *de* (D) *est au plus égale à 2 fois l'optimum de* (D).

Q4.5. (1) *En déduire un nouvel algorithme d'approximation pour le problème 3.1 et dont la garantie de performance, que vous expliciterez, est constante.*

Q4.6. (1) *Soit* G *un graphe dont chaque sommet est de degré 1. Calculez* z *et* u *et comparez à la solution de ce dernier algorithme.*

Correction Question 4.

1. (1) $S = \emptyset$, $G_S = G$ (2) tant que $G_S \neq \emptyset$: sélectionner un sommet i de G_S de degré maximal et supprime de G_S toutes les arêtes incidentes à i et tous les sommets isolés, (3) $S = S \cup \{i\}$. Dans le pire des cas (graphe complet), il y a exactement m suppression d'arêtes (en $n-1$ itérations).
2. Sur le graphe complet $\mathbb{K}^n$, cet algorithme retourne $n-1$, la valeur optimale, car la suppression des arêtes ne crée jamais de sommet isolé, excepté à la toute dernière itération.
3. On montre par l'absurde que y est une solution réalisable de (D) : Supposons qu'il existe une arête $e = (i,j)$ telle que $y_i = y_j = 0$ alors, par définition de y, ni i ni j n'appartient à une arête du couplage C_x défini par x. Par conséquent, l'ensemble $C = C_x \cup \{e\}$ est également un couplage (i et j ne sont couverts que par l'arête e) de cardinalité strictement supérieure à celle de C_x, ce qui est impossible car le couplage C_x est maximum.
4. La taille du transversal S_y est égale au nombre de sommets extrémités d'une arête du couplage C_x. Comme un sommet appartient à au plus une arête de C_x, $|S_y| = 2|C_x| = 2z$. Comme par ailleurs $z \leqslant u$, alors $\sum_{i\in V} y_i = |S_y| \leqslant 2u$.
5. L'algorithme consiste à calculer un couplage maximum x (par l'algorithme d'Edmonds) puis à en déduire la solution y de (D). Le ratio de la valeur de y sur l'optimum de (D) est 2 dans le pire des cas. La garantie de performance est donc 2. *Note : on peut se contenter de trouver un couplage maximal (au sens de l'inclusion), ce qui est beaucoup plus simple et rapide, par exemple : tant qu'il existe des arêtes dans le graphe, on en choisit une* (i,j), *on l'ajoute au couplage et on supprime du graphe toute arête d'extrémité* i *ou* j. *La taille de ce couplage* C' *est nécessairement inférieure à* z *et les extrémités des arêtes de* C' *forme également un transversal* S' *(même preuve par l'absurde) tel que* $|S'| = 2|C'| \leqslant 2z \leqslant 2u$.
6. Cette borne est atteinte par exemple, si tous les sommets du graphe G sont de degré 1 : $u = z = n/2$ et $|S_y| = n$.