GIPAD – GS2
Recherche Opérationnelle - APP1
Correction devoir final

5 octobre 2011

---

durée : 3 heures
documents autorisés : tous documents papiers, hors livres et photocopies de livre.
barème : note sur 20 = nombre de points * 20 / 30

1. Modélisation PLNE (5 points)
2. Graphes et dualité (15 points)
3. Recherche locale (10 points)

1 Modélisation linéaire

Problème 1 The Graph Bandwidth Problem.
On considère un graphe simple non-orienté $G = (V, E)$ *de cardinalités :* $|V| = n$ *sommets et* $|E| = m$ *arêtes.*

Un ordre linéaire *de* G *est une numérotation des sommets de* G *de 1 à* n*. Autrement dit, il s'agit d'une affectation* $f : V \to \{1, 2, \dots, n\}$*, telle que deux sommets distincts* $i, j \in V$ *sont affectés à deux numéros distincts* $f(i) \neq f(j)$.

La largeur de bande *d'un ordre* f*, notée* $\Phi_f(G)$*, est la différence maximale entre les numéros de deux sommets adjacents, i.e.* $\Phi_f = \max\{|f(u) - f(v)|\ ,\ (u, v) \in E\}$.

Le problème de largeur de bande (Graph Bandwidth Problem) consiste à trouver un ordre linéaire de G *de largeur de bande minimale. Cette valeur est appelée la largeur de bande du graphe* G.

Question 1 ***(5 points)***

Q1.1. Modélisez ce problème en un programme linéaire en nombres entiers. (Définissez précisément les variables de décision en fonction de f).

Q1.2. Calculez la valeur optimale de sa relaxation continue.

Correction Question 1.

1.

$$
\begin{aligned}
(GB):\ \min\ & z \\
\text{s.t. } z \geqslant & \sum_{k=1}^{n} k(x_u^k - x_v^k) && \forall (u, v) \in E \\
& \sum_{k=1}^{n} x_u^k = 1 && \forall u \in V, \\
& \sum_{u \in V} x_u^k = 1 && \forall k = 1, \dots, n, \\
& x_u^k \in \{0, 1\} && \forall u \in V, k = 1, \dots, n \\
& z \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

où, dans chaque solution, z est la largeur de l'ordre linéaire f défini par $x_u^k = 1 \iff f(u) = k$, ou alternativement par $f(u) = \sum_{k=1}^{n} k x_u^k$ pour tout $u \in V$.

2. La relaxation continue de (GB) a un optimum de 0. C'est le coût de la solution optimale : $x_u^k = 1/n$ pour tout $u \in V$, $k = 1, \dots, n$.

2 Graphes et dualité

Question 2 ***Quelques problèmes de graphe (15 points)***

Problème 2.1. On considère un ensemble des stations de radio présentes sur un territoire donné. On souhaite allouer la fréquence radio ’88.8’ à un maximum de stations. Afin d’éviter les interférences, cette fréquence ne doit pas être allouée simultanément à 2 stations distantes de moins de 200 km.

Q2.1. (1) Décrivez ce problème (P) de graphe et donnez son nom usuel.

On note $G = (V, E)$ *le graphe simple non-orienté soujacent à* (P). *On suppose dans la suite que* G *est connexe. Le* ***graphe complémentaire*** G^C *de* G *est défini sur le même ensemble de sommet* V *et possède une arête entre deux sommets* i *et* j *de* V *si et seulement si* (i, j) *n’est pas une arête de* G *; formellement :* $G^C = (V, (V \times V) \setminus E)$.

Q2.2. (1) Montrez que toute solution optimale S de (P) forme une clique de cardinalité maximale dans G^C. Déduisez-en la classe de complexité de (P).

Q2.3. (2) Proposez une formulation linéaire en nombres entiers du problème (P).

Q2.4. (1) Soit le programme linéaire en nombres entiers suivant, défini sur le même graphe connexe $G = (V, E)$ de (P) :

$$(Q) : \; u \; = \; \min \sum_{e \in E} y_e \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \sum_{e \in E \mid i \in e} y_e \geqslant 1, \qquad \forall i \in V, \tag{2}$$

$$y_e \in \mathbb{Z}_+, \qquad \forall e \in E. \tag{3}$$

Décrivez ce problème de graphe et donnez son nom usuel.

Q2.5. (2) Montrez que (Q) fournit une borne supérieure de (P).

Q2.6. (2) *Le problème de* ***couplage maximum*** *sur le graphe* $G = (V, E)$ *consiste à déterminer un sous-ensemble d’arêtes* C *de cardinalité maximale tel que tout sommet appartienne à au plus une arête de* C.
Modélisez ce problème en un programme linéaire en nombres entiers (M).

Q2.7. (2) Écrire le programme linéaire dual de (M).

Q2.8. (2) Déterminez les valeurs respectives de (P), (Q) et (M) pour les graphes particuliers suivants :
graphe complet : $V = \{1, \dots, n\}$, $E = V \times V$
graphe étoile : $V = \{1, \dots, n\}$, $E = \{1\} \times (V \setminus \{1\})$

Q2.9. (2) Étant donné `MaximumMatching` un algorithme polynomial, prenant en entrée un graphe simple quelconque $G = (V, E)$ et retournant un couplage maximum C de G, montrez que l’algorithme suivant est correct et qu’il retourne une solution optimale de (Q) pour tout graphe simple connexe $G = (V, E)$.

0. $C =$`MaximumMatching`(G) ; $C' = \emptyset$
1. $W = \{i \in V \mid (i, j) \notin C, \forall j \in V\}$
2. pour tout sommet $i \in W$ faire
  choisir une arête quelconque $e \in E$ incidente à i
  ajouter e à l’ensemble C'
3. retourner $C \cup C'$.

Correction Question 2.

1. Soit $G = (V, E)$ le graphe simple non-orienté des stations interférantes : V l'ensemble des stations et E l'ensemble des paires de stations distantes de moins de 200km. Il s'agit de sélectionner un sous-ensemble S de sommets 2 à 2 non-adjacents et de cardinalité maximal. C'est le problème du *stable* (ou *ensemble indépendant*) maximum (ou de cardinalité maximale).
2. Par définitions du complémentaire, d'un stable et d'une clique, toute paire de sommets d'un stable de G est liée par une arête dans G^C et toute paire de sommets d'une clique de G^C est indépendante dans G. Donc, un stable dans G est une clique dans G^C, et inversement. Par cette équivalence, une solution optimale de (P) est un stable maximum dans G, donc une clique maximum dans G^C. La complexité des 2 problèmes est la même, car le complémentaire d'un graphe se construit en temps polynomial. Max-Clique étant NP-difficile, Max-Stable l'est également.
3. G étant connexe, tout $i \in V$ appartient à au moins une arête $(i, j) \in E$ et donc $x_i \leqslant x_i + x_j \leqslant 1$.

$$(P) : \ z = \max \sum_{i \in V} x_i \tag{4}$$
$$\text{s.t. } x_i + x_j \leqslant 1, \qquad \forall (i, j) \in E, \tag{5}$$
$$x_i \in \mathbb{Z}_+, \qquad \forall i \in V. \tag{6}$$

4. (Q) consiste à sélectionner un ensemble d'arêtes de cardinalité minimal tel que chaque sommet du graphe est couvert par au moins une arête. C'est le problème de *couverture d'arêtes minimum*.
5. Les relaxations continues de (Q) et (P) vérifient la propriété de dualité forte, donc $z \leqslant \bar{z} = \bar{u} \leqslant u$.
6.

$$(M) : \ r = \max \sum_{e \in E} z_e \tag{7}$$
$$\text{s.t. } \sum_{e \in E \mid i \in e} z_e \leqslant 1, \qquad \forall i \in V, \tag{8}$$
$$z_e \in \mathbb{Z}_+, \qquad \forall e \in E. \tag{9}$$

7. le dual de (M) est le dual de sa relaxation continue :

$$(\bar{D}) : \ \bar{v} = \min \sum_{i \in V} t_i \tag{10}$$
$$\text{s.t. } t_i + t_j \geqslant 1, \qquad \forall (i, j) \in E, \tag{11}$$
$$t_i \geqslant 0, \qquad \forall i \in V. \tag{12}$$

8. Graphe complet : un stable a au plus un sommet donc $z = 1$; dans tout graphe, une couverture possède au moins $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ arêtes, et cette borne est atteinte dans le cas d'un graphe complet (par ex : $C = \{(i, i+1), i \text{ impair }\}$ auquel on ajoute l'arête $(n-1, n)$, si n est impair). Si n est pair, C est également un couplage maximum. Si n est impair, on retire $(n-1, n)$, donc $r = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Graphe étoile : $z = n - 1$ (stable $V \setminus \{1\}$) ; $u = n - 1$ (couverture E) ; $r = 1$ (couplage a au plus une arête).
9. Soit C un couplage maximum de G et soit C' l'ensemble des arêtes ajoutées dans la boucle. Pour chaque sommet $i \in W$, il existe au moins une arête $e = (i, j) \in E$ incidente à i, car le graphe est connexe. Ainsi $C \cup C'$ est bien une couverture d'arêtes de G. De plus, on a nécessairement $e \notin C$, par définition de W, et on a nécessairement $j \notin W$, car autrement $C \cup \{(i, j)\}$ formerait un couplage de G de cardinalité strictement supérieure à C. Ainsi l'arête e ne pourra pas être sélectionnée deux fois dans la boucle. Donc C' possède exactement $|W| = n - 2r$ arêtes disjointes. Ainsi $|C \cup C'| = |C| + |C'| = r + (n - 2r) = n - r$. Montrons que $C \cup C'$ est une couverture de cardinalité minimale : Toute couverture d'arêtes non vide se décompose en $K \cup K'$ où K est le couplage max dans la couverture et K' les arêtes complémentaires. Soit k la cardinalité de K alors, K couvre exactement $2k$ sommets, et K' possède au moins une arête distincte pour chacun des $n - 2k$ sommets restants. Donc $|K \cup K'| \geqslant k + (n - 2k) = n - k \geqslant n - r = |C \cup C'|$. CQFD.

3 Recherche locale : problème d'affectation quadratique

Question 3 *(10 points)*

Problème 3.1. n *unités communiquant toutes entre elles deux à deux, doivent être placées sur* n *sites distants. On note* $f_{ij} \geqslant 0$ *le flux d'échanges entre deux unités* i *et* j *et* $d_{kl} \geqslant 0$ *la distance entre deux sites* k *et* l. *Si l'unité* i *est placée sur le site* k *et l'unité* j *sur le site* l, *alors le coût de communication entre* i *et* j *est égal au produit du flux entre les unités par la distance entre les sites :*

$$c_{ij} = f_{ij} d_{kl}.$$

Le problème d'affectation quadratique (QAP) consiste à trouver une affectation des unités aux sites (une unité par site et un site par unité) qui minimise la somme des coûts de communication entre toutes les paires d'unités.

Note : toute solution réalisable du QAP s'exprime comme une permutation p *sur* $\{1, \dots, n\}$ *définie par* $p(i) = k$ *si et seulement si l'unité* i *est placée sur le site* k.

Q3.1. (1) dénombrez l'ensemble des solutions réalisables du QAP.

Q3.2. (1) qualifiez l'ensemble des solutions réalisables de QAP, vu dans le graphe complet biparti des unités et des sites.

Q3.3. (1) exprimez la valeur du coût $c(p)$ d'une solution réalisable p du QAP par une formule mathématique, fonction de f, d, et p et sachant que les matrices de flux f et de distance d sont symétriques.

Q3.4. (2) proposez une méthode constructive (algorithme glouton) **simple** pour le QAP et donner sa complexité.

Q3.5. (1) *voisinage sur les permutations :* décrivez les mouvements de recherche locale consistant à échanger deux arêtes disjointes :

1. d'un tour dans le contexte du TSP sur le graphe des villes (mouvement 2-opt)
2. d'une affectation dans le contexte du QAP sur le graphe biparti des unités et des sites (mouvement transposition)

Donnez la taille du voisinage de ce dernier.

Q3.6. * Étant donnée une solution réalisable p, on note p_{ij} la solution obtenue après échange des placements de deux unités i et j ($1 \leqslant i < j \leqslant n$). Montrez que la variation du coût occasionnée par cette échange est égale à (à un facteur constant près) :

$$\Delta_{ij}^{p} = \sum_{u=1, u \neq i, u \neq j}^{n} (f_{iu} - f_{uj})(d_{p(u)p(j)} - d_{p(u)p(i)}) \quad (13)$$

Q3.7. * Soient deux paires distinctes d'unités (u, v) et (i, j), une solution réalisable p, et p_{uv} la solution obtenue en échangeant les affectations respectives de u et de v dans le placement p. Montrez que (à un facteur constant près) :

$$\Delta_{ij}^{p_{uv}} - \Delta_{ij}^{p} = \big((f_{iu} - f_{uj}) - (f_{iv} - f_{vj})\big)\big((d_{p(v)p(j)} - d_{p(v)p(i)}) + (d_{p(u)p(i)} - d_{p(u)p(j)})\big) \quad (14)$$

où $\Delta_{ij}^{p_{uv}} = c((p_{uv})_{ij}) - c(p_{uv})$ est le surcoût d'échange de i et j dans la solution p_{uv}.

Q3.8. (4) À partir des formules des deux questions précédentes, proposez une méthode de descente pour le QAP et donnez sa complexité.

Correction Question 3.

1. L'ensemble des solutions réalisables du QAP est de cardinalité $n!$.
2. les solutions réalisables du QAP sont les couplages maximaux du graphe biparti et inversement.
3. on minimise $2c(p)$ sur l'ensemble des permutations p avec $c(p) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} f_{ij} d_{p(i)p(j)}$.
4. plein de choix : une heuristique simple ($O(n)$) consiste à poser $p(i) = i$ pour tout $i = 1..n$.
5. Un tour et une affectation peuvent tous deux être encodés par une permutation p : le tour est la séquence des arêtes $(p(i), p(i+1))$ du graphe (avec $p(n+1) = p(1)$) et l'affectation est l'ensemble des arêtes $(i, p(i))$ du graphe biparti. dans le contexte du TSP : l'échange de deux arêtes disjointes $(p(i), p(i+1))$ et $(p(j), p(j+1))$ mène à un nouveau tour correspondant à la permutation $(p(1), \dots, p(i), p(j), p(j-1), \dots, p(i+1), p(j+1), \dots, p(n))$; dans le contexte du QAP : l'échange de deux arêtes disjointes $(i, p(i))$ et $(j, p(j))$ mène à une nouvelle affectation correspondant à la permutation $(p(1), \dots, p(i-1), p(j), p(i+1), \dots, p(j-1)p(i), p(j+1), \dots, p(n))$. Ainsi dans le contexte du QAP, p_{ij} est définie par $p_{ij}(u) = p(j)$ si $u = i$, $p(i)$ si $u = j$, $p(u)$ sinon. Le mouvement de transposition est l'ensemble des opérations $o_{ij} : p \mapsto p_{ij}$ avec $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Comme $p(u) \neq p(v)$ pour tout $u \neq v$, on montre facilement que $p_{ij} = p_{i'j'} \Rightarrow (i,j) = (i',j')$. Autrement dit, les opérations o_{ij} définissent des permutations toutes différentes. Donc

$$\mathrm{card}(V(p)) = \mathrm{card}\{(i,j) | 1 \leqslant i < j \leqslant n\} = \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) = \sum_{i=1}^{n-1} i = n(n-1)/2$$

6. $\Delta_{ij}^p = 2c(p_{ij}) - 2c(p) = 2 \sum_{u=1}^{n-1} \sum_{v=u+1}^{n} f_{uv}(d_{p_{ij}(u)p_{ij}(v)} - d_{p(u)p(v)})$ Seuls les termes tels que $u \in \{i,j\} \iff v \notin \{i,j\}$ sont non nuls.
7. on dépile le calcul depuis :

$$(\Delta_{ij}^{p_{uv}} - \Delta_{ij}^{p})/2 = \sum_{k=1, k\neq i, k\neq j}^{n} (f_{ik} - f_{kj})\big((d_{p_{uv}(k)p_{uv}(j)} - d_{p_{uv}(k)p_{uv}(i)}) - (d_{p(k)p(j)} - d_{p(k)p(i)})\big).$$

8. on définit les primitives suivantes :
   `cout()` { RETURN $\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} f_{ij} d_{ij}$ }
   `delta(i,j)` { RETURN $\sum_{k=1,k\neq i,k\neq j}^{n} (f_{ik} - f_{kj})(d_{kj} - d_{ki})$ }
   `delta2(i,j,u,v)` { RETURN $\big((f_{iu} - f_{uj}) - (f_{iv} - f_{vj})\big)\big((d_{vj} - d_{vi}) + (d_{ui} - d_{uj})\big)$ }
   `swap(p,u,v)` { $k = p[u]$; $p[u] = p[v]$; $p[v] = k$ }
   Elles sont de complexités respectives $O(n^2)$, $O(n)$, $O(1)$, et $O(1)$.

   step 0. initialisation : $p[i] = i$ pour $i = 1..n$
   $c =$`cout()`
   $D[i][j] = c+$`delta(i,j)` pour $i = 1..n-1$, $j = i+1..n$

   step 1. déterminer (u, v, c') tels que $c' = max_{(i,j)} D[i][j] = D[u][v]$

   step 2. si $c' \geqslant c$ **STOP RETURN** p

   step 3. `swap(p,u,v)`
   $D[i][j] = D[i][j]+$`delta2(i,j,u,v)` pour $i = 1..n-1$, $j = i+1..n$
   GOTO step 1

   L'initialisation est réalisée en $O(n^3)$ et chaque itération en $O(n^2)$.