FIL: Séries génératrices
devoir final

Sophie.Demassey@mines-nantes.fr

14 octobre 2011

---

durée : 1h15
documents autorisés : tous documents papiers, hors livres et photocopies de livre.

QUESTIONS BONUS

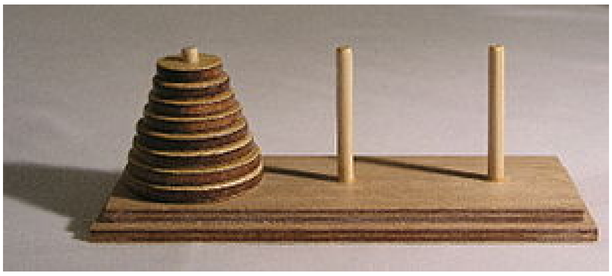
À ne traiter qu'une fois terminées les questions sur les tours de Hanoi ! !

Soit la suite définie par récurrence par :

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ a_{n-1} + 4n & \forall n \geqslant 1. \end{cases}$$

Question 1 *Traiter au choix l'une des deux questions indépendantes suivantes :*
Q1.1.(difficile) *Déterminer le terme général de la suite au moyen de l'expression de sa série génératrice ;*
Q1.2.(facile) *Prouver par récurrence que le terme général de la suite est* $2n^2 + 2n + 1$.

Complexité temporelle de l'algorithme des tours de Hanoi



Le problème des tours de Hanoi consiste à déplacer une pile de n disques de diamètres tous différents d'une tour de départ D, vers une tour d'arrivée A en s'aidant d'une tour intermédiaire I, de sorte que :

– on ne peut déplacer plus d'un disque à la fois ;
– on ne peut placer un disque que sur un autre disque plus grand que lui ou sur un emplacement libre ;
– le nombre de déplacements est minimal.

Initialement, les n disques sont placés selon cette deuxième règle sur la tour de départ D. Si $n = 1$, il suffit de déplacer l'unique disque directement depuis la tour D vers la tour A. Si $n = 2$, on déplace le plus petit disque de D vers I, on déplace ensuite le plus grand disque de D vers A, on déplace enfin le plus petit disque de I vers A. Ainsi l'algorithme récursif pour résoudre ce problème, pour tout $n \geqslant 2$, consiste à :

1. déplacer les $n-1$ plus petits disques de la tour D vers la tour I par l'*intermédiaire* de A ;
2. déplacer le grand disque restant de la tour D vers la tour A ;
3. déplacer les $n-1$ plus petits disques de la tour I vers la tour A par l'*intermédiaire* de D.

En Java, cet algorithme peut s'écrire ainsi :

```
Hanoi(int n, int D, int I, int A) {
    if (n >= 1) {
      Hanoi(n-1, D, A, I);
      System.out.println(''déplace disque '' + n + '' de '' + D + '' vers '' + A);
      Hanoi(n-1, I, D, A);
    }
}
```

On remarque que cette méthode ne fait rien quand $n = 0$, ou plutôt, elle n'exécute qu'une seule instruction (le test `n>=1`) mais n'affiche rien.

Question 2 On note a_n le nombre d'instructions exécutées par la méthode `Hanoi` pour une pile de $n \geqslant 0$ disques.

Q2.1. Déterminer les valeurs de a_n pour $n = 0, 1, 2$.

Q2.2. Montrer que la suite (a_n) satisfait la formule de récurrence suivante :

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 2a_{n-1} + 2 & \forall n \geqslant 1. \end{cases}$$

Q2.3. En déduire que sa fonction génératrice est $G(x) = \frac{1+x}{(1-x)(1-2x)}$.

Q2.4. En déduire que le terme général de la suite est $a_n = 3.2^n - 2$.

Q2.5. Vérifier l'expression du terme général pour $n = 0, 1, 2$.

Q2.6. Vérification générale : étant donnée la formule de récurrence de la suite, prouver par récurrence que son terme général est bien $3.2^n - 2$.

Correction Question Hanoi.

1. $a_0 = 1, a_1 = 4, a_2 = 10, \ldots$
2. Si $n \geqslant 1$, il y a 4 appels dans la méthode : le test (1), le 1er appel récursif à Hanoi (a_{n-1}), l'affichage (1) et le 2nd appel récursif à Hanoi (a_{n-1}), soit :
$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 2a_{n-1} + 2 & \forall n \geqslant 1. \end{cases}$$
3.
$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n = a_0 + \sum_{n \geqslant 1} (2a_{n-1} + 2)x^n \\ &= 1 + 2x \sum_{n \geqslant 1} a_{n-1} x^{n-1} + 2(\sum_{n \geqslant 0} x^n - x^0) \\ &= 1 + 2xG(x) + \frac{2}{1-x} - 2 \\ &= \frac{-(1-x)+2}{(1-x)(1-2x)} \\ &= \frac{1+x}{(1-x)(1-2x)}. \end{aligned}$$
4. Soient a et b tels que $G(x) = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1-2x}$: $1 + x = a(1-2x) + b(1-x) = (a+b) + (-2a-b)x$. On cherche $a + b = 1$ et $-2a - b = 1$, donc $1 = -2a + (a-1) = -a - 1$: $a = -2$ et $b = 3$.
5.
$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{-2}{1-x} + \frac{3}{1-2x} \\ &= -2 \sum_{n \geqslant 0} x^n + 3 \sum_{n \geqslant 0} 2^n x^n \\ &= \sum_{n \geqslant 0} (3.2^n - 2)x^n. \end{aligned}$$
On en déduit que $a_n = 3.2^n - 2$ pour tout $n \geqslant 0$.
6. vérification premiers termes : $a_0 = 3 - 2 = 1$, $a_1 = 3.2 - 2 = 4$, $a_2 = 3.4 - 2 = 10$
7. vérification preuve par récurrence : On cherche à prouver la propriété $P(n)$: $a_n = 3.2^n - 2$ pour tout $n \geqslant 0$.
   (a) si $n = 0$ alors $a_0 = 1 = 3.2^0 - 2$ donc $P(0)$ est vraie.
   (b) soit $n \geqslant 1$, et supposons que $P(n-1)$ soit vraie ; alors
$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + 2 && \text{((par définition))} \\ &= 2(3.2^{n-1} - 2) + 2 && \text{((par hypothèse } P(n-1)\text{))} \\ &= 3.2^n - 4 + 2 = 3.2^n - 2. \end{aligned}$$
   Donc $P(n)$ est vraie.

   D'après le principe d'induction simple, la propriété $P(n)$ est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

Correction Question Bonus.

$$\begin{aligned}
G(x) &= \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n = a_0 + \sum_{n\geqslant 1}(a_{n-1}+4n)x^n \\
&= 1 + x\sum_{n\geqslant 1} a_{n-1}x^{n-1} + 4x\sum_{n\geqslant 1} nx^{n-1} \\
&= 1 + xG(x) + \frac{4x}{(1-x)^2} \\
&= \frac{(1-x)^2+4x}{(1-x)(1-x)^2} \\
&= \frac{(1+x)^2}{(1-x)^3} \\
&= (1+2x+x^2)\sum_{n\geqslant 0}\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n \\
&= \sum_{n\geqslant 0}\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n + \sum_{n\geqslant 0}\frac{2(n+1)(n+2)}{2}x^{n+1} + \sum_{n\geqslant 0}\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^{n+2} \\
&= \sum_{n\geqslant 0}\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n + \sum_{n\geqslant 0}\frac{2n(n+1)}{2}x^n + \sum_{n\geqslant 0}\frac{(n-1)n}{2}x^n \qquad (*) \\
&= \sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} + \frac{2n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2}\right)x^n \\
&= \sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2+3n+2+2n^2+2n+n^2-n}{2}x^n \\
&= \sum_{n\geqslant 0}(2n^2+2n+1)x^n.
\end{aligned}$$

$(*)$ on remarque que le terme de la 2nde série est nul pour $n = 0$, de même que les termes de la 3ème série pour $n = 0$ et $n = 1$: c'est pour cette raison que l'on peut *étendre* les deux séries à $n \geqslant 0$, même après les changements de variables respectifs : $n+1 \to n$ et $n+2 \to n$.

Preuve par récurrence de $P(n)$: $a_n = 2n^2 + 2n + 1$ pour tout $n \geqslant 0$:

1. si $n = 0$ alors $a_0 = 1 = 2.0^2 + 2.0 + 1$ donc $P(0)$ est vraie.
2. soit $n \geqslant 1$, et supposons que $P(n-1)$ soit vraie ; alors

$$\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + 4n && \text{((par définition))} \\
&= 2(n-1)^2 + 2(n-1) + 1 + 4n && \text{((par hypothèse } P(n-1)\text{))} \\
&= 2n^2 + 2 - 4n + 2n - 2 + 1 + 4n = 2n^2 + 2n + 1.
\end{aligned}$$

Donc $P(n)$ est vraie.

D'après le principe d'induction simple, la propriété $P(n)$ est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.