FIL: Séries génératrices
Aide-Mémoire

Sophie.Demassey@mines-nantes.fr

12 octobre 2011

---

1 Identités remarquables

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\
(a+b)(a-b) &= a^2 - b^2
\end{aligned}
$$

2 Sommes partielles

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Pour retrouver la formule, $S_n = \sum_{k=1}^{n} k$:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & S_n & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & (n-2) & + & (n-1) & + & n \\
+ & S_n & = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
= & 2S_n & = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) \\
 & & = & n(n+1) & & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

Pour retrouver la formule, $S_n = \sum_{k=1}^{n} q^k$:

$$
\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & S_n & = & 1 & + & q & + & q^2 & + & \dots & + & q^(n-1) & + & q^n & & \\
- & qS_n & = & & - & q & - & q^2 & - & q^3 & - & \dots & - & q^n & - & q^{n+1} \\
= & (1-q)S_n & = & 1 & + & 0 & + & 0 & + & \dots & + & 0 & + & 0 & - & q^{n+1} \\
 & & = & 1-q^{n+1} & & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

3 Séries génératrices de référence

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 0} x^n = \frac{1}{1-x}}$$

Pour retrouver la formule, $G(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n = \frac{1}{1-x}$:
$1 = G(x) - xG(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n - \sum_{n\geqslant 0} a_n x^{n+1} = a_0 + \sum_{n\geqslant 1}(a_n - a_{n-1})x^n$
donc $a_0 = 1, a_1 = a_0 = 1, a_2 = a_1 = 1, \dots, a_n = a_{n-1} = 1$.

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 0}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}}$$

Pour retrouver la formule, $G(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$:
$G(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = (\frac{1}{1-x})^2 = (\sum_{n\geqslant 0} x^n)^2 = \sum_{n\geqslant 0}(\sum_{k=0}^{n} 1)x^n$ donc $a_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1, \forall n \geqslant 0$.

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 0}\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n = \frac{1}{(1-x)^3}}$$

Pour retrouver la formule, $G(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$:
$G(x) = \frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{1-x}\frac{1}{(1-x)^2} = (\sum_{n\geqslant 0} x^n)(\sum_{n\geqslant 0}(n+1)x^n) = \sum_{n\geqslant 0}(\sum_{k=0}^{n}(k+1))x^n$

4 Opérations sur les séries génératrices

$$\begin{array}{lclcl}
\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n & + & \sum_{n\geqslant 0} b_n x^n & = & \sum_{n\geqslant 0}(a_n+b_n)x^n \\
\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n & \times & \sum_{n\geqslant 0} b_n x^n & = & \sum_{n\geqslant 0}(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k})x^n
\end{array}$$

5 Trouver le terme général à partir d'une formule de récurrence

1. on introduit la formule $a_n = f(a_{n-1})$ dans l'expression de sa série $G(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$:
$$G(x) = a_0 + \sum_{n\geqslant 1} f(a_{n-1})x^n = a_0 + x\sum_{n\geqslant 1} f(a_{n-1})x^{n-1} = a_0 + x\sum_{n\geqslant 0} f(a_n)x^n.$$
2. on remplace $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ par $G(x)$ dans l'expression de droite, on en déduit :
$$G(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \text{ avec } P(x) \text{et} Q(x) \text{ des polynomes.}$$
3. on factorise le polynôme $Q(x) = (1-\alpha x)(1-\beta x)$, par exemple. En pratique :
$$\begin{aligned}
Q(x) = \ & x^2 + ax + b = \left(x^2 + ax + (\frac{a}{2})^2 - (\frac{a}{2})^2\right) + b && (\textit{id. remarquable 1 ou 2}) \\
= \ & (x+\frac{a}{2})^2 - (\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2})^2 = (x+\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2})(x+\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2}). && (\textit{id. remarquable 3})
\end{aligned}$$
4. on dissocie les facteurs :
$$G(x) = \frac{P(x)}{c(1-\alpha x)(1-\beta x)} = \frac{P_1(x)}{1-\alpha x} + \frac{P_2(x)}{1-\beta x}$$
5. on identifie aux séries de référence :
$$G(x) = P_1(x)\sum_{n\geqslant 0}\alpha^n x^n + P_2(x)\sum_{n\geqslant 0}\beta^n x^n$$
6. on manipule les coefficients :
$$G(x) = \sum_{n\geqslant 0}\gamma_n x^n$$
7. on identifie le terme général :
$$a_n = \gamma_n,\ \forall n \geqslant 0$$