FIL: Séries génératrices
TD1: Récurrence

Sophie.Demassey@mines-nantes.fr

4 octobre 2011

---

1 Preuve par récurrence simple

Théorème 1 (Principe d'Induction) *Soit* $P(n)$ *une propriété définie pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$.

1. *si* $P(0)$ *est vraie ;*
2. *et si, pour tout* $n \geqslant 1$, $P(n-1)$ *vraie* $\implies$ $P(n)$ *vraie ;*

alors $P(n)$ *est vraie pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Question 1 *Soit la suite d'entiers* $(a_n)_{n\geqslant 0}$ *définie par récurrence par :*

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1} + 2n - 1 & \forall n \geqslant 1, \\ 0 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Q1.1. *Déterminez le terme général* a_n *de la suite.*

Q1.2. *Prouvez que* $a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Correction Question 1.

1. $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 9, ...$ on suppose que $a_n = n^2$... reste à prouver par récurrence la propriété suivante :
$$P(n): \quad a_n = n^2, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$
   (a) $0^2 = 0 = a_0$ donc $P(0)$ est vraie ;
   (b) supposons que $P(n-1)$ vraie pour $n \geqslant 1$, alors $a_n = a_{n-1} + (2n-1) = (n-1)^2 + 2n - 1 = n^2 - 2n + 1 + 2n - 1 = n^2$; donc $P(n)$ est vraie.

   Par le principe d'induction $P(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On prouve également la seconde propriété par récurrence :
$$Q(n): \quad a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}(2k+1), \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$
   (a) $a_{0+1} = a_1 = 1^2 = \sum_{k=0}^{0}(2k+1)$ donc $Q(0)$ est vraie ;
   (b) supposons que $Q(n-1)$ vraie pour $n \geqslant 1$, alors $a_{n+1} = a_n + (2n+1) = \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) + 2n + 1 = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)$; donc $Q(n)$ est vraie.

2 Preuve par récurrence généralisée

Théorème 2 (Principe d'Induction Généralisé) *Soit* $P(n)$ *une propriété définie pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$.

1. *si* $P(0)$ *est vraie ;*
2. *et si, pour tout* $n \geqslant 1$, *(*$P(k)$ *vraie* $\forall 0 \leqslant k < n$*)* $\implies$ $P(n)$ *vraie ;*

alors $P(n)$ *est vraie pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Question 2 *Soit* $(F_n)_{n \geqslant 0}$ *la suite de Fibonacci, définie par :*

$$F_n = \begin{cases} F_{n-1} + F_{n-2} & \forall n \geqslant 2, \\ 1 & \textit{si } n = 0 \textit{ ou } n = 1. \end{cases}$$

Prouvez que $F_{p+q} = F_p F_q + F_{p-1} F_{q-1}$ *pour tout* $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$.

Correction Question 2.

On prouve par récurrence généralisée sur q uniquement, pour un $p \geqslant 1$ quelconque **fixé** :

$$P(q): \quad F_{p+q} = F_p F_q + F_{p-1} F_{q-1}, \qquad \forall q \geqslant 1.$$

1. $F_{p+1} = F_p + F_{p-1} = F_p F_1 + F_{p-1} F_0$ donc $P(1)$ est vraie ;
2. $F_{p+2} = F_{p+1} + F_p = (F_p + F_{p-1}) + F_p = 2F_p + F_{p-1} = F_p F_2 + F_{p-1} F_1$ donc $P(2)$ est vraie ;
3. soit $q \geqslant 3$, supposons que $P(k)$ soit vraie pour tout $1 \leqslant k < q$, alors

$$\begin{aligned} F_{p+q} &= F_{p+(q-1)} + F_{p+(q-2)} = F_p F_{q-1} + F_{p-1} F_{q-2} + F_p F_{q-2} + F_{p-1} F_{q-3} \\ &= F_p (F_{q-1} + F_{q-2}) + F_{p-1} (F_{q-2} + F_{q-3}) = F_p F_q + F_{p-1} F_{q-1}. \end{aligned}$$

   donc $P(q)$ est vraie.
   Note : ces calculs sont faux pour $q = 2$ car alors F_{q-3} n'est pas défini.

Par le principe d'induction généralisé $P(q)$ est donc vraie pour tout $q \geqslant 1$.

3 Preuve par récurrence multiple

Théorème 3 (Principe d'Induction Multiple) *Soit* $P(m,n)$ *une propriété définie pour tous entiers* $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. *si* $P(0,n)$ *est vraie pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *;*
2. *si* $P(m,0)$ *est vraie pour tout* $m \in \mathbb{N}$ *;*
3. *et si, pour tous* $m \geqslant 1$ *et* $n \geqslant 1$, $P(p,q)$ *vraie* $\forall 0 \leqslant p < m, 0 \leqslant q < n$*)* $\implies$ $P(m,n)$ *vraie ;*

alors $P(m,n)$ *est vraie pour tous* $m,n \in \mathbb{N}$.

Question 3 *Soit* C_k^n *le nombre de combinaisons de* k *éléments parmi* n*, pour tous* $0 \leqslant k \leqslant n$ *(rappel :* $C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ *et* $0! = 1$*). Prouvez que* $C_k^n = C_{k-1}^{n-1} + C_k^{n-1}$ $\forall 1 \leqslant k \leqslant n$.

Correction Question 3.

On prouve par récurrence multiple sur (k,n) :

$$P(k,n) : C_k^n = C_{k-1}^{n-1} + C_k^{n-1}, \qquad \forall 1 \leqslant k \leqslant n.$$

1. Si $n = 1$ alors $k = 1$ et $C_k^1 = \frac{1!}{1!0!} = 1 = C_0^0 + C_0^1$ donc $P(k,1)$ est vraie $\forall 1 \leqslant k \leqslant 1$;
2. Si $k = 1$ et $n \geqslant 1$ et $C_1^n = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$ et $C_0^{n-1} + C_1^{n-1} = \frac{(n-1)!}{(n-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-2)!} = 1 + (n-1) = C_k^n$, donc $P(1,n)$ est vraie $\forall 1 \leqslant n$;
3. Soit $2 \leqslant k \leqslant n$ et supposons que $P(l,m)$ est vraie pour tous $1 \leqslant l < k, 1 \leqslant m < n$ tels que $l \leqslant m$ alors

$$\begin{aligned}
C_{k-1}^{n-1} + C_k^{n-1} &= C_{k-2}^{n-2} + C_{k-1}^{n-2} + C_{k-1}^{n-2} + C_k^{n-2} \\
&= \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} + 2\frac{(n-2)!}{(k-1)!(n-k-1)!} + \frac{(n-2)!}{k!(n-k-2)!} \\
&= \frac{(n-2)!}{k!(n-k)!}(k(k-1) + 2k(n-k) + (n-k-1)(n-k)) \\
&= \frac{(n-2)!}{k!(n-k)!}(k^2-k) + (2kn-2k^2) + (n^2-nk-n-nk+k^2+k)) \\
&= \frac{(n-2)!}{k!(n-k)!}(n^2-n) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_k^n.
\end{aligned}$$

   donc $P(k,n)$ est vraie.

Par le principe d'induction multiple $P(k,n)$ est donc vraie pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$.

4 Applications

Question 4 *Dans la preuve des propositions suivantes, précisez le principe d'induction (simple, généralisé, multiple) utilisé et les cas initiaux :*

Q4.1. *Prouvez que* $9^n - 1$ *est divisible par 8 pour tout entier* n *strictement positif.*

Q4.2. *Prouvez que* $x^n - y^n$ *est divisible par* $x - y$ *pour tout* n *strictement positif.*

Q4.3. *Prouvez que* $n! > 2^n$ *pour* $n \geqslant 4$.

Q4.4. *Soit la proposition* $P(n)$ *: de George Pólya dans tout groupe de* n *chevaux, les chevaux on tous la même couleur. Démontrez en quoi la preuve par induction suivante est incorrecte :* $P(1)$ *est trivialement vraie. Supposons* $n > 1$ *tel que* $P(n-1)$ *soit vraie, et soit un groupe de* n *chevaux numérotés de 1 à* n *alors* $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ *et* $\{2, 3, \ldots, n\}$ *sont deux groupes de* $n-1$ *chevaux. D'arpès* $P(n-1)$*, les chevaux de 1 à* $n-1$ *sont tous de la même couleur et les chevaux de 2 à* n *sont tous de la même couleur.Comme les deux groupes s'instersectent, on en déduit que tous les* n *chevaux ont la même couleur et donc* $P(n)$ *est vraie. D'après le principe d'induction simple,* $P(n)$ *est vraie pour tout* $n \geqslant 1$.

Q4.5. *Prouvez que tout entier supérieur à 1 est soit un entier premier, soit un produit d'entiers premiers.*

Q4.6. *Prouvez que* $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2+n}{2}$.

Q4.7. *Prouvez que* $\sum_{k=1}^{n} \log \frac{k+1}{k} = \log(n+1)$ *pour* $n \geqslant 1$.

Q4.8. *Prouvez que tout entier strictement positif* n *possède une écriture binaire :* $n = \sum k = 0^p c_k 2^k$ *avec* $p \in \mathbb{N}$*, et* $c_k \in \{0, 1\}$ *pour tout* $k \geqslant 0$.

Q4.9. *Prouvez que* $\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$ *pour tout entier* n *positif,* (F_n) *étant la suite de Fibonacci.*

Q4.10. *Trouvez le nombre de recouvrements possibles d'un tableau de taille* $2 \times n$ *par des dominos* (2×1).

Q4.11. *Prouvez que tout courrier de plus de 12 centimes peut être affranchi au moyen de timbres de 4 et 5 centimes.*

Correction Question 4.

1. simple $(n = 1)$: $9^n - 1 = 9(9^{n-1} - 1) + 8 = 9.8\alpha + 8 = 8(9\alpha + 1)$
2. simple $(n = 1)$: $x^n - y^n = x.x^{n-1} - y(x^{n-1} - \alpha(x - y)) = (x - y)(x^{n-1} + y\alpha)$
3. simple $(n = 4)$: $n! = n.(n-1)! > n.2^{n-1} > 2.2^{n-1} = 2^n$
4. si $n = 2$, les deux groupes $\{1, \ldots, n-1\}$ et $\{2, \ldots, n\}$ ne s'intersectent pas et donc l'argument ne tient pas pour $n = 2$. Le principe d'induction ne s'applique alors pas.
5. généralisée $(n = 2)$: 2 est premier ; si n est premier OK, sinon il existe $1 < m, p < n$ tels que $n = mp$ et m et p sont premiers ou facteurs de premiers.
6. simple $(n = 1)$: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n-1)^2+n-1}{2} + n = \frac{n^2-2n+1+n-1}{2} + \frac{2n}{2} = \frac{n^2+n}{2}$.
7. simple $(n = 1)$: $\exp(\sum_{k=1}^{n} \log \frac{k+1}{k}) = \exp(\log(n) + \log(\frac{n+1}{n})) = \exp(\log(n)).\exp(\log(\frac{n+1}{n})) = n.\frac{n+1}{n} = n + 1$ donc $\sum_{k=1}^{n} \log \frac{k+1}{k} = n$.
8. généralisée $(n = 0)$: $n = 0$, on prend $p = 0$ et $c_0 = 0$; si n pair, alors $n = 2(n/2)$ avec $0 < n/2 < n$; sinon $n = 2(n-1)/2 + 1$ avec $0 \leqslant (n-1)/2 < n$.
9. simple $(n = 0)$: $F_0 = F_2 - 1 = 1$; $F_{n+2} = F_n + F_{n+1} = F_n + \sum_{k=0}^{n-1} F_k - 1 = \sum_{k=0}^{n} F_k - 1$
10. $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 5$,... On a soit un recouvrement du sous-rectangle $2 \times (n-1)$ + un domino vertical occupant les 2 carrés restants ; soit un recouvrement du sous-rectangle $2 \times (n-2)$ + 2 dominos horizontaux occupant les 4 carrés restants ; ainsi $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ avec $a_0 = 1$ et $a_1 = 1$: Fibonacci.
11. généralisé $(n = 12)$: $n = 12$: 3 timbres de 4 ; $n + 1 = 4m + 5p + 1$ si $m \geqslant 1$ alors $n + 1 = 4(m-1) + 5(p+1)$ sinon $n + 1 = 5p + 1$ avec $n \geqslant 12$ donc $p \geqslant 3$, et $n + 1 - 4 \geqslant 16 - 4 = 12$ donc $n + 1 - 4 = 4m' + 5p'$ et donc $n + 1 = 4(m' + 1) + 5p'$.