FIL: Séries génératrices
TD2: Applications

Sophie.Demassey@mines-nantes.fr

11 octobre 2011

---

1 Résolution de récurrence

Question 1 *Résoudre la récurrence :*

$$a_n = \begin{cases} 3a_{n-1} + 4^n & \forall n \geqslant 1, \\ 1 & \textit{si } n = 0. \end{cases}$$

Correction Question 1.

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n = a_0 + \sum_{n\geqslant 1} 3a_{n-1}x^n + \sum_{n\geqslant 1} 4^n x^n \\ &= 1 + 3x \sum_{n\geqslant 1} a_{n-1}x^{n-1} + (\sum_{n\geqslant 0} 4^n x^n - 4^0) = 3xG(x) + \frac{1}{1-4x} \\ &= \frac{1}{(1-3x)(1-4x)} = \frac{a}{1-3x} + \frac{b}{1-4x}, \end{aligned}$$

avec $a+b=1$ et $-4a-3b=0$, donc $0 = 4a + 3(1-a) = a+3$, donc $a=-3$ et $b = 1-a = 4$, d'où :

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{-3}{1-3x} + \frac{4}{1-4x} \\ &= (-3)\sum_{n\geqslant 0} 3^n x^n + 4\sum_{n\geqslant 0} 4^n x^n \\ &= \sum_{n\geqslant 0} (4^{n+1} - 3^{n+1})x^n. \end{aligned}$$

Donc $a_n = 4^{n+1} - 3^{n+1}, \forall n \geqslant 0$. On vérifie :

$$\begin{aligned} a_0 &= 4 - 3 = 1 \\ 3a_{n-1} + 4^n &= 3(4^n - 3^n) + 4^n = 4^{n+1} - 3^{n+1} = a_n. \end{aligned}$$

2 Complexité d'un algorithme récursif

Question 2 *Montrer que la complexité temporelle de l'algorithme récursif suivant est* $\Theta((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n) = O(2^n)$ *:*

```
Pell(int n) {
     if (n ⩽ 1) return n;
     return 2*Pell(n-1)+Pell(n-2);
}
```

Correction Question 2.

$f_0 = f_1 = 1$ et $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}\ \forall n \geqslant 2$ c'est Fibonacci.

$$\begin{aligned}
G(x) &= \sum_{n\geqslant 0} f_n x^n = f_0 + f_1 x + \sum_{n\geqslant 2} f_{n-1}x^n + \sum_{n\geqslant 2} f_{n-2}x^n \\
&= 1 + x + x\sum_{n\geqslant 2} f_{n-1}x^{n-1} + x^2 \sum_{n\geqslant 2} f_{n-2}x^{n-2} \\
&= 1 + x + x(G(x) - f_0) + x^2 G(x) = 1 + G(x)(x + x^2) \\
&= \frac{1}{1-x-x^2} = \frac{1}{(\sqrt{5}/2)^2 - (x+1/2)^2} = \frac{1}{(a-x)(b+x)}.
\end{aligned}$$

avec $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $b = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Soient c et d tels que $G(x) = \frac{c}{a-x} + \frac{d}{b+x}$ alors $c - d = 0$ et $ca + bd = 1$. Donc $d = c = \frac{1}{a+b} = \frac{1}{\sqrt{5}}$. On remarque par ailleurs que $ab = \frac{5-1}{4} = 1$:

$$\begin{aligned}
G(x) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{b+x}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{b}{1-bx} + \frac{a}{1+ax}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{b}{1-bx} + \frac{a}{1-(-a)x}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(b\sum_{n\geqslant 0} b^n x^n + a\sum_{n\geqslant 0}(-a)^n x^n\right) \\
&= \sum_{n\geqslant 0} \frac{b^{n+1} - (-a)^{n+1}}{\sqrt{5}} x^n
\end{aligned}$$

Donc $f_n = \frac{(\sqrt{5}+1)^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}$. On vérifie :

$$\begin{aligned}
f_0 &= \frac{(\sqrt{5}+1) - (1-\sqrt{5})}{2\sqrt{5}} = 1 \\
f_1 &= \frac{(\sqrt{5}+1)^2 - (1-\sqrt{5})^2}{4\sqrt{5}} = \frac{(5+1+2\sqrt{5}) - (1+5-2\sqrt{5})}{4\sqrt{5}} = 1 \\
f_{n-1} + f_{n-2} &= \frac{(\sqrt{5}+1)^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}} + \frac{(\sqrt{5}+1)^{n-1} - (1-\sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1}\sqrt{5}} \\
&= \frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}+1)^{n-1} - (1-\sqrt{5})(1-\sqrt{5})^{n-1} + 2(\sqrt{5}+1)^{n-1} - 2(1-\sqrt{5})^{n-1}}{2^n\sqrt{5}} \\
&= \frac{(\sqrt{5}+1+2)(\sqrt{5}+1)^{n-1} - (1-\sqrt{5}+2)(1-\sqrt{5})^{n-1}}{2^n\sqrt{5}} \\
&= \frac{(6+2\sqrt{5})(\sqrt{5}+1)^{n-1} - (6-2\sqrt{5})^2(1-\sqrt{5})^{n-1}}{2^{n+1}\sqrt{5}} \\
&= \frac{(\sqrt{5}+1)^2(\sqrt{5}+1)^{n-1} - (1-\sqrt{5})^2(1-\sqrt{5})^{n-1}}{2^{n+1}\sqrt{5}} = f_n
\end{aligned}$$

Correction Question 2 (suite).

$$\frac{f_n}{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1-(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}})^{n+1})$$

Quand n tend vers l'infini le terme à droite tend vers 0, il existe donc $1 > \epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $-\epsilon \leqslant (\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}})^{n+1} \leqslant \epsilon$ pour tout $n \geqslant N$. Ainsi,

$$0 \leqslant \frac{2}{\sqrt{5}(1+\sqrt{5})}(1-\epsilon) \leqslant \frac{f_n}{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n} \leqslant \frac{2}{\sqrt{5}(1+\sqrt{5})}(1+\epsilon)).$$

Donc $f_n = \Theta(\phi^n)$ avec $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \leqslant 2$.

3 Probabilité des mots

Question 3 *On souhaite connaître la probabilité qu'un mot de longueur n sur l'alphabet $\{0, 1, 2\}$ ne possède ni 1 consécutifs, ni 2 consécutifs.*

Q3.1. *On considère A_n l'ensemble des mots de longueur $n \geqslant 0$ qui ne possèdent ni 1 consécutifs, ni 2 consécutifs et $s_n = |A_n|$ sa cardinalité. A_0 est uniquement constitué du mot vide, donc $s_0 = 1$. Calculer s_1 et s_2.*

Q3.2. *On note A_n^k l'ensemble des mots de A_n dont le dernier 0 est k-ème symbole du mot. Montrer que $|A_n^k| = 2s_{k-1}$, pour tout $n \geqslant 2$ et $0 < k < n$;*

Q3.3. *En déduire que $s_n = 2 + 2s_0 + 2s_1 + \cdots + 2s_{n-2} + s_{n-1}$, pour tout $n \geqslant 2$; et que la formule est également vraie pour $n = 1$;*

Q3.4. *Calculer la fonction génératrice de $(s_n)_{n \geqslant 0}$;*

Q3.5. *Calculer le terme général de $(s_n)_{n \geqslant 0}$ et vérifier l'expression pour $n = 0, 1, 2$;*

Q3.6. *En déduire la probabilité attendue pour tout $n \geqslant 0$.*

Correction Question 3.

- A_1 représente tous les mots de longueurs 1 donc $s_1 = 3^1 = 3$ et A_2 l'ensemble de mots de longueurs 2 exceptés 11 et 22, donc $s_2 = 3^2 - 2 = 7$.
- w est un mot de A_n^k si et seulement si $w = w_1.0.w_2$ avec $w_1 \in A_{k-1}$ et $w_2 \in A_{n-k} \cap \{121212\dots, 212121\dots\}$. Il y a donc s_{k-1} possibilités pour w_1 et 2 possibilités pour w_2.
- $A_n = A_n^0 \cup \sum_{k=1}^{n-1} A_n^k \cup A_n^n$ et ces $n+1$ ensembles sont tous disjoints. Il n'y a que 2 mots dans A_n qui ne possède aucun 0 : $A_n^0 = \{121212\dots, 212121\dots\}$ et il y a s_{n-1} mots de A_n qui terminent par 0, donc $s_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2s_{k-1} + s_{n-1}$;
- on remarque que l'expression récursive de s_n est vraie pour $n = 1$ car $s_1 = 3 = 2 + s_0$:

$$\begin{aligned}
S(x) = \sum_{n\geqslant 0} s_n x^n &= 1 + \sum_{n\geqslant 1} (2 + 2\sum_{k=0}^{n-2} s_k + s_{n-1})x^n \\
&= 1 + 2\sum_{n\geqslant 1} x^n + 2x^2 \sum_{n\geqslant 0}\sum_{k=0}^{n} s_k x^n + x\sum_{n\geqslant 0} s_n x^n \\
&= 1 + 2(\sum_{n\geqslant 0} x^n - 1) + 2x^2(\sum_{n\geqslant 0} x^n)(\sum_{n\geqslant 0} s_n x^n) + x\sum_{n\geqslant 0} s_n x^n \\
&= 1 - 2 + \frac{2}{1-x} + \frac{2x^2 S(x)}{1-x} + xS(x) \\
&= \frac{-1(1-x) + 2 + 2x^2 S(x) + x(1-x)S(x)}{1-x} = \frac{(1+x) + (x^2+x)S(x)}{1-x}
\end{aligned}$$

  D'où $(1 - x - x^2 - x)S(x) = (1+x)$, donc $S(x) = \frac{1+x}{1-2x-x^2}$.
- $x^2 + 2x - 1 = (x+1)^2 - 2 = (x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2})$ donc $S(x) = \frac{-(1+x)}{(\sqrt{2}-1-x)(-\sqrt{2}-1-x)}$.

  On cherche a et b tels que $S(x) = \frac{a}{\sqrt{2}-1-x} + \frac{b}{-\sqrt{2}-1-x}$, i.e. :

$$-1 - x = a(-\sqrt{2} - 1 - x) + b(\sqrt{2} - 1 - x) = (-a\sqrt{2} - a + b\sqrt{2} - b) - (a+b)x$$
$$1 = a + b \text{ et } -1 = (-a\sqrt{2} - a + b\sqrt{2} - b) = ((b-1)\sqrt{2} + (b-1) + b\sqrt{2} - b) = 2\sqrt{2}b - 1 - \sqrt{2}.$$

  Donc $a = b = \frac{1}{2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
2S(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}-1-x} + \frac{1}{-\sqrt{2}-1-x} \\
&= \frac{\sqrt{2}+1}{1-(\sqrt{2}+1)x} + \frac{1-\sqrt{2}}{1-(1-\sqrt{2})x} \\
&= \sum_{n\geqslant 0} ((\sqrt{2}+1)^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1})x^n
\end{aligned}$$

  Finalement : $s_n = \frac{(\sqrt{2}+1)^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}}{2}$.
- la probabilité est le ratio $s_n/3^n$.

4 Dénombrement de pavage

Question 4 *On souhaite paver une allée de taille $3 \times n$ au moyen de dalles de taille 2×1, sachant que les dalles ne peuvent pas être découpées. Il s'agit de calculer a_n le nombre de pavages possibles, pour tout $n \geqslant 0$.*

Q4.1. *Déterminer tous les pavages possibles pour $n = 1, 2, 3, 4$.*

Q4.2. *Quelle est la valeur de a_n si n est impair ?*

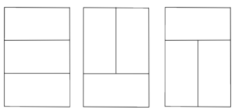
Q4.3. *On considère b_n le nombre de pavages d'une allée de taille $3 \times n$ à laquelle on retire le carré unitaire en haut à droite. Noter que par symétrie b_n correspond également au nombre de pavages d'une allée de taille $3 \times n$ à laquelle on retire le carré unitaire en bas à droite. Quelle est la valeur de b_n si n est pair ? Déterminer b_n pour $n = 1, 3$.*

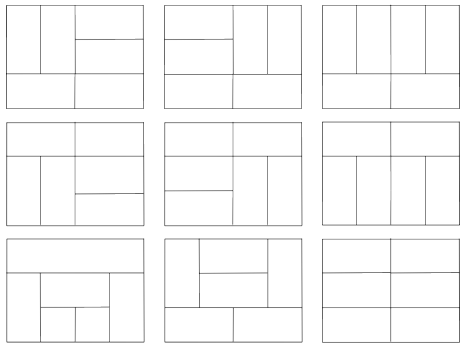
Q4.4. *Exprimer a_n et b_n par des formules de récurrence imbriquées.*

Q4.5. *En déduire les fonctions génératrices respectives.*

Q4.6. *En déduire $a_n = 4a_{n-2} - a_{n-4}$ pour tout $n \geqslant 4$, puis l'expression du terme général de a_n.*

Correction Question Pavage.

n=2 

n=4 

- Si n est impair alors l'aire de l'allée est impaire et donc ne peut être recouverte par des dalles de taille paire : $a_n = 0$ pour tout entier impair $n \geqslant 1$. $a_2 = 3$, $a_4 = 9$.
- Si n est pair, l'aire de l'allée $3n - 1$ est impaire et donc ne peut être couverte par des dalles de tailles paires, donc $b_n = 0$ pour tout entier pair $n \geqslant 0$. $b_1 = 1$ et $b_3 = 4$.
- Pour a_n : soit $n \geqslant 2$ impair, on regarde la dernière colonne (1×3) : soit celle-ci est recouverte par 3 dominos horizontaux, soit par 1 domino vertical au-dessus d'un domino horizontal, soit par 1 domino vertical au-dessous d'un domino horizontal. On a a_{n-2} possibilités dans le 1er cas, b_{n-1} possibilités dans le 2nd cas, et b_{n-1} possibilités dans le 3ème cas en posant $a_0 = 1$.
- Pour b_n : soit $n \geqslant 3$ impair, la dernière colonne (1×2) est couverte par un domino vertical ou par deux dominos horizontaux. On a a_{n-1} possibilités dans le 1er cas. Dans le second cas, on a aussi nécessairement un domino horizontal couvrant le haut de l'avant-dernière colonne, donc il y a b_{n-2} possibilités dans le 2nd cas. Ainsi :

$$a_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \geqslant 1, n \text{ impair} \\ a_{n-2} + 2b_{n-1} & n \geqslant 2, n \text{ pair,} \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n \geqslant 0, n \text{ pair} \\ b_{n-2} + a_{n-1} & n \geqslant 3, n \text{ impair.} \end{cases}$$

Correction Question pavage (suite).

Soit $A(x)$ et $B(x)$ les séries génératrices de a_n et b_n respectivement. On remarque que les formules de récurrences de a_n et b_n restent valides pour n impair et n pair, respectivement, en posant les conditions initiales supplémentaires : $a_1 = 0$ et $b_0 = 0$. Donc :

$$\begin{aligned}
A(x) &= \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n = 1 + 0 + \sum_{n\geqslant 2}(a_{n-2} + 2b_{n-1})x^n \\
&= 1 + x^2A(x) + 2x(B(x) - b_0) = \frac{1+2xB(x)}{1-x^2}, \\
B(x) &= \sum_{n\geqslant 0} b_n x^n = 0 + x + \sum_{n\geqslant 2}(b_{n-2} + a_{n-1})x^n \\
&= x + x^2B(x) + x(A(x) - a_0) = \frac{xA(x)}{1-x^2} \\
&= \frac{x+2x^2B(x)}{1-2x^2+x^4} = \frac{x}{1-4x^2+x^4} \\
A(x) &= \frac{(1-x^2)B(x)}{x} = \frac{1-x^2}{1-4x^2+x^4} \\
&= \frac{1-x^2}{(x^2-2)^2-3} = \frac{1-x^2}{(x^2-2-\sqrt{3})(x^2-2+\sqrt{3})} \\
&= \frac{a}{x^2-2-\sqrt{3}} + \frac{b}{x^2-2+\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

avec $a + b = -1$ et $1 = a(\sqrt{3}-2) - b(\sqrt{3}+2) = 2a\sqrt{3} + 2 + \sqrt{3}$ donc $a = \frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$ et $b = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
A(x) &= \frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}(x^2-2-\sqrt{3})} + \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}(x^2-2+\sqrt{3})} \\
&= \frac{(1+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{2\sqrt{3}(1-(2-\sqrt{3})x^2)} + \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+2)}{2\sqrt{3}(1-(2+\sqrt{3})x^2)} \\
&= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\sum_{n\geqslant 0}(2-\sqrt{3})^n x^{2n} + \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\sum_{n\geqslant 0}(2+\sqrt{3})^n x^{2n}.
\end{aligned}$$

ainsi, $a_{2n} == \frac{(\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})^n + (\sqrt{3}+1)(2+\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$ et $a_{2n+1} = 0$ pour tout $n \geqslant 0$. On vérifie :

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{(\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3}) + (\sqrt{3}+1)(2+\sqrt{3})}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}-5+3\sqrt{3}+5}{2\sqrt{3}} = 3 \\
a_4 &= \frac{(\sqrt{3}-1)(7-2\sqrt{3}) + (\sqrt{3}+1)(7+2\sqrt{3})}{2\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}-13+9\sqrt{3}+13}{2\sqrt{3}} = 9.
\end{aligned}$$

Par ailleurs $A(x) = \frac{1-x^2}{1-4x^2+x^4}$ signifie que $1 - x^2 = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n - 4a_n x^{n+2} + a_n x^{n+4} = a_0 + a_1 x + (a_2 - 4a_0)x^2 + (a_3 - 4a_1)x^3 + \sum_{n\geqslant 4}(a_n - 4a_{n-2} + a_{n-4})x^n$. On a bien $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 - 4a_0 = 3 - 4 = 1$, $a_3 - 4a_1 = 0$ et $a_n = 4a_{n-2} - a_{n-4}$ pour tout $n \geqslant 4$.

5 Taille d'un arbre

Question 5 *Un arbre binaire enraciné de taille $n \geqslant 1$ est un graphe non orienté $T = (V, E)$, avec V l'ensemble de sommets et E l'ensemble d'arêtes dans $V \times V$, défini récursivement par :*

- *si $n = 1$ alors $V = \{r\}$ et $E = \emptyset$, autrement dit : T possède un unique sommet r appelé la* racine *de l'arbre et aucune arête. On note $T = (r, \emptyset, \emptyset)$*
- *si $n \geqslant 2$, alors T possède un sommet particulier r appelé la racine de l'arbre, relié à uniquement 2 autres sommets tels que chacun est la racine d'un arbre binaire propre de tailles respectives k et $n-k$ avec $1 \leqslant k \leqslant n-1$, autrement dit : $V = \{r\} \cup V_g \cup V_d$ et $E = \{(r, r_g), (r, r_d)\} \cup E_g \cup E_d$ tels que $T_g = (V_g, E_g)$ est un arbre binaire enraciné en r_g de taille k et $T_d = (V_d, E_d)$ est un arbre binaire enraciné en r_d de taille $n-k$. On note $T = (r, T_g, T_d)$.*

De plus, pour tout arbre $T = (r, T_g, T_d)$ on peut définir $T' = (r, T_d, T_g)$ l'arbre obtenu par échange des sous-arbres gauche et droit, et on a la propriété : $T \neq T'$ si et seulement si T_g et T_d sont de tailles différentes.

Q5.1. *Dessiner tous les arbres de taille 5.*

Q5.2. *Soit c_n le nombre d'arbres binaires enracinés de taille $n \geqslant 1$, exprimer c_n par une formule récursive.*

Q5.3. *Soit $A(x) = \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ une série génératrice quelconque, exprimer $A(x)^2$. En déduire que la fonction génératrice $C(x)$ de la suite (c_n), avec $c_0 = 0$, vérifie $C(x) = C(x)^2 + x$.*

Q5.4. *Déterminer $C(x)$ en résolvant l'équation $y^2 - y + x = 0$ sur l'inconnu y, sachant que $C(0) = c_0 = 0$.*

Q5.5. *En déduire le terme général c_n, sachant que pour tout entier $n \geqslant 0$ et pour tout réel $r \in \mathbb{R}$, on a*

$$(1+z)^r = \sum_{n \geqslant 0} \frac{r(r-1)(r-2)\dots(r-n+1)}{n!} z^n,$$

Les entiers $(c_1, c_2, c_3, \dots)$ sont appelés **nombres de Catalan**. Ils interviennent dans le comptage d'un très grand nombre de structures combinatoires, telles que : les formules bien parenthésées $a(b(cd)(ef))$ (en compilation) ; les différentes manières d'empiler (*push*) et de dépiler (*pop*) une pile initialement vide (en structure de données) ; le nombre de triangulations d'un polygone régulier (en géométrie) ; etc.

Correction Question arbre.

- $(1,3), (3,1), (2,2)$
- Si $n = 1$ alors $c_n = 1$, sinon soit $T = (r, T_g, T_d)$ un arbre de taille n et soit k la taille de T_g, alors $1 \leqslant k \leqslant n-1$ et T_d est de taille $n-k$. Il y a donc $c_k c_{n-k}$ possibilités. Ainsi $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}$ pour tout $n \geqslant 2$.
- Soit $C(x) = \sum_{n \geqslant 0} c_n x^n$, en posant $c_0 = 0$. Alors $C(x) = x + \sum_{n \geqslant 2} \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k} x^n$. Par ailleurs $C(x)C(x) = \sum_{n \geqslant 0} \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k} x^n = c_0 + 2c_0 c_1 x + \sum_{n \geqslant 2} \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k} x^n = C(x) - x$.
- $0 = C(x)^2 - C(x) + x = (C(x) - \frac{1}{2})^2 + x - \frac{1}{4} = (C(x) - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x})(C(x) - \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x}$. Comme $C(0) = 0$ alors la seule possibilité est que $C(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2}$.
- On utilise la formule avec $z = -4x$ et $r = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
C(x) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-4x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Big(\sum_{n \geqslant 0} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-4x)^n\Big) \\
&= -\frac{1}{2}\Big(\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{2^n} \frac{(1-2.1)(1-2.2)\dots(1-2(n-1))}{n!}(-4x)^n\Big) \\
&= -\frac{1}{2}\Big(\sum_{n \geqslant 1} \frac{(2-1)(4-1)(6-1)\dots(2(n-1)-1)}{n!}(-1)2^n x^n\Big) \\
&= \sum_{n \geqslant 1} \frac{1.3.6\dots(2n-3)}{n!} \frac{2^{n-1}(n-1)!}{(n-1)!} x^n \\
&= \sum_{n \geqslant 1} \frac{1.3.6\dots(2n-3)}{n!} \frac{2.4.6.(2n-2)}{(n-1)!} x^n = \sum_{n \geqslant 1} \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} x^n = \sum_{n \geqslant 1} \frac{C_{n-1}^{2n-2}}{n} x^n.
\end{aligned}$$