Optimisation mathématique : introduction et application à la gestion de l'eau

UCA – Master Hydroprotech

Sophie Demassey (CMA, Mines Paris – PSL)
sophie.demassey@minesparis.psl.eu http://sofdem.github.io/

Décider

comment concevoir et piloter un système ou un processus

- répondant à un besoin avec un impact minimal
- maximisant une utilité avec un impact limité

impacts :

- consommation de ressources : financières, humaines, naturelles,...
- émissions : pollution, chaleur, souffrance,...

Décision pour la gestion de l'eau

Transition, décision, eau

L'eau est un facteur entre humains et environnement :

- nexus eau-énergie-alimentation
- les aquifères sont des biotopes naturels et artificiels
- sujet et vecteur des pollutions thermiques et chimiques
- témoin et symptôme du changement climatique

GÉNÉRER/STOCKER DE L'HYDRO-ÉLECTRICITÉ

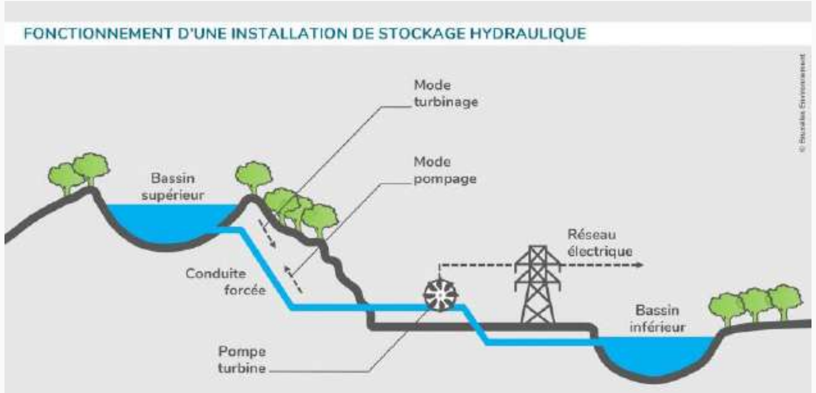


Figure 1 – opérer pompes et turbines pour maximiser la valeur de production électrique en respectant des niveaux de réservoirs

IRRIGUER

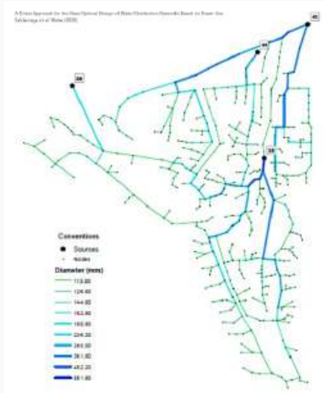


Figure 2 – agencer un réseau d'irrigation pour couvrir une surface de culture changeante [Saldarriaga 2020]

ACHEMINER L'EAU POTABLE

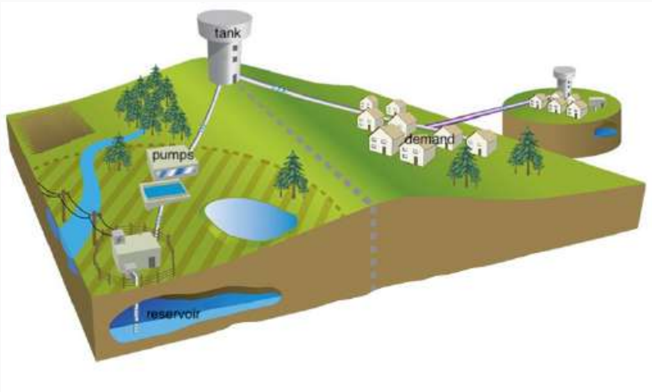


Figure 3 – dimensionner le réseau et opérer pompes et valves à moindre coût énergétique pour satisfaire la demande variable en eau potable [Bonvin 2021]

TRAITER LES EAUX USÉES

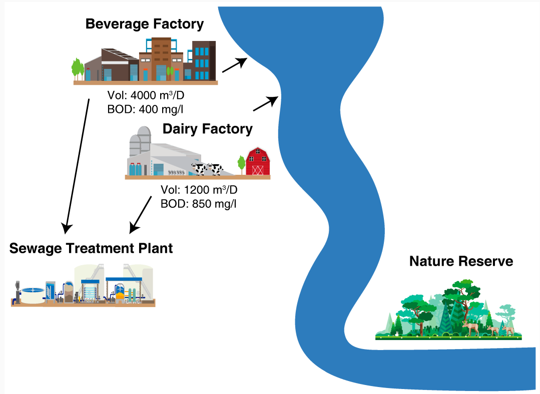


Figure 4 – dimensionner des systèmes de traitement des eaux usées à moindre coût pour respecter une limite environnementale [Zhou 2019]

CAPTER LES EAUX SOUTERRAINES

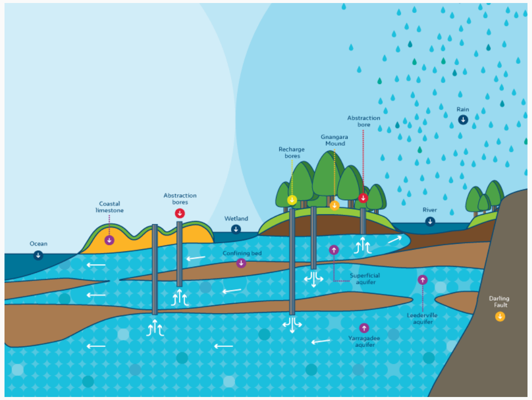


Figure 5 – positionner et dimensionner les puits et pompes pour satisfaire la demande – en qualité et quantité – et minimiser l'impact sur les aquifères – en qualité et quantité [Water Corporation]

CONTRÔLER LES CRUES

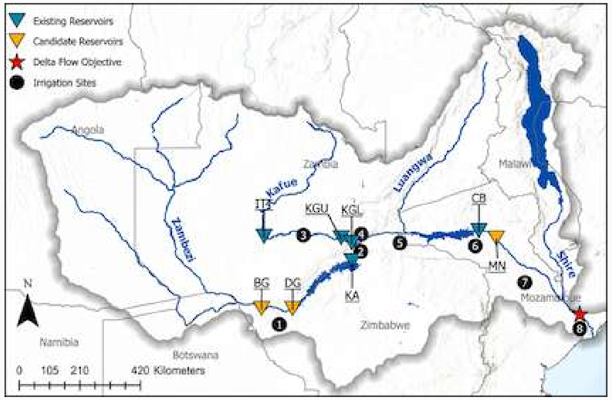


Figure 6 – planifier la construction de barrages et contrôler les débits pour minimiser les risques d'inondation en satisfaisant les besoins des différents usagers [Arnold 2023]

PLANIFIER LE SYSTÈME ÉLECTRIQUE ZERO-CARBONE EN 2050

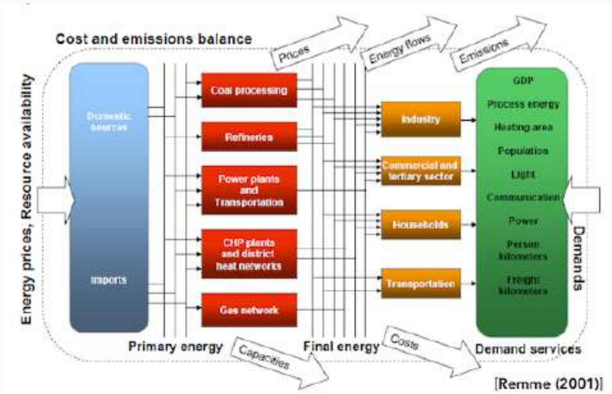


Figure 7 – planifier les investissements dans le système électrique et le rôle de l'hydro-électricité pour atteindre le net-zero carbone en 2050

AUTRES EXEMPLES

- efficacité énergétique des usines de désalinisation
- gestion durable de l'eau d'irrigation
- usage économique de l'eau dans les procédés industriels (lavage, refroidissement, vapeur, dilution, forage,...)
- mesure et surveillance des aquifères
- résilience des infrastructures face aux aléas météorologiques
- logistique humanitaire
- adaptation des politiques face au changement climatique
- conflits interfrontaliers

FACETTES DE L'EAU

une **commodité** à soutirer, collecter, traiter, acheminer, distribuer, valoriser
une **ressource** à mobiliser dans la limite de disponibilité
un **environnement** à préserver
un **élément** météorologique et climatique à maîtriser

FACETTES DE LA DÉCISION

toutes les échelles : de l'opération journalière d'un ballon d'eau chaude à la planification énergétique des pays

concevoir et piloter des systèmes et processus

commodités	eau potable, d'irrigation, usée ; eau souterraine, retenue, courante ; minéraux, salinité, polluants ; électricité consommée ou produite
systèmes	installation (pompe, barrage, station), réseau urbain, rivière, aquifère, bassin, région, monde
décideurs	politique publique, entreprises privées, besoins collectif ou individuel
échéances	opérationnelle (pilotage/court-terme) et stratégique (conception/long-terme)
temporalités	décision statique (agencement, dimensionnement) ou dynamique (planification, ordonnancement)
données	connues, prédites, hypothétiques

FACETTES DE LA DÉCISION

- ...
- temporalités...
- données...
- objectifs : coûts/revenus financiers, impact environnemental, risque/satisfaction des usagers **à minimise/maximiser**

décider = **optimiser**

DÉCISION = OPTIMISATION

sélectionner la **meilleure** des alternatives **possibles** – les **solutions** –
au regard d'un critère quantitatif – l'**objectif**.

DES OBJECTIFS À OPTIMISER

temps :	min durée de trajet, min retard
espace :	min distance de trajet, min espace perdu
budget :	min coût, max profit
biens :	max production, min consommation
choix :	max satisfaction
équilibre :	min énergie potentielle

one person's solutions should not become another person's problem

SIMULER, OPTIMISER, MODÉLISER

Comment concevoir et piloter un système/processus ?

- identifier les alternatives possibles
- attribuer un score quantifiant la valeur de chaque alternative
- trouver une alternative de plus haut score

simulation : **évalue** la faisabilité et le score d'une alternative
heuristique : **parcourt et évalue progressivement** quelques alternatives
optimisation : parcourt et évalue **(implicitement) toutes** les alternatives

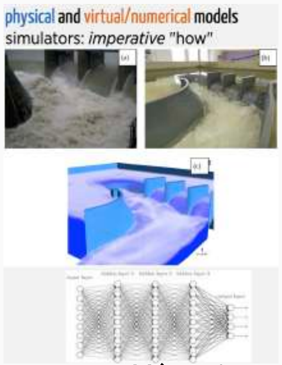
optimisation

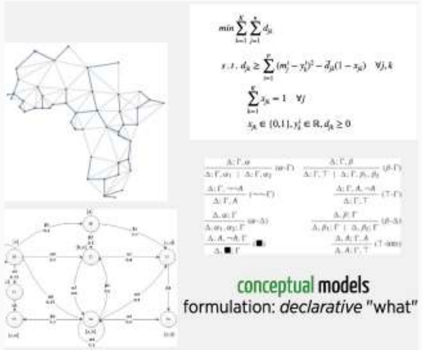
modèle	représentation *précise* du système et du score pour **évaluer**
algorithme	parcours *rapide* des alternatives à la recherche du meilleur score

OPTIMISATION MATHÉMATIQUE

MODÈLES

La faisabilité et la valeur d'une décision sont observées sur un modèle du système/processus (non sur le système/processus même)





assemblé par des experts ou **entraîné** sur des exemples (machine learning)

MODÈLES D'OPTIMISATION

Un modèle d'optimisation mathématique est

une représentation implicite des solutions du problème
par des **relations** entre des **inconnues** par des **fonctions** analytiques sur des **variables**
à valeurs réelles

$$\min \{ f(x) \, : \, g_i(x) \leq 0 \, \forall i \in \{1, \ldots, m\}, \, x \in \mathbb{R}^n \}$$

variables x : un vecteur représentant une solution
objectif $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: la fonction à minimiser
contraintes $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: les relations à satisfaire simultanément
solutions optimales : affectation $x \in \mathbb{R}^n$ satisfaisant $g(x) \leq 0$ et minimisant f

EXEMPLE 1 : MODÉLISER

dimensionnement de canalisations

choisir le diamètre des canalisations sur deux portions d'un réseau, dans un budget de 180 euros, pour maximiser le débit, sachant que :

- 1ère portion : diamètre maximal=40cm, coût 3 euros/cm, débit 3u/cm
- 2nde portion : diamètre maximal=60cm, coût 2 euros/cm, débit 5u/cm

EXEMPLE 1 : MODÉLISER

dimensionnement de canalisations

choisir le diamètre des canalisations, dans un budget de 180 euros, pour maximiser le débit ; 1ère portion : 40cm max, 3 euros/cm, débit 3u/cm ; 2nde portion : 60cm max, coût 2 euros/cm, débit 5u/cm.

quelles sont les inconnues ? l'objectif ? les contraintes ?

- variables : $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ diamètre (en cm) des canalisations sur les deux portions
- objectif : maximiser le débit (en u) $3x_1 + 5x_2$
- contraintes de dimension : les diamètres sont limités $0 \leq x_1 \leq 40, 0 \leq x_2 \leq 60$
- contrainte de budget : le coût (en euros) est limité $3x_1 + 2x_2 \leq 180$

EXEMPLE 1 : MODÈLE ANALYTIQUE

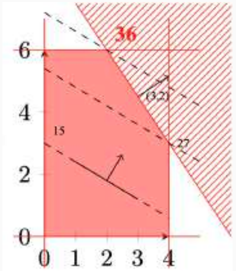
- espace des solutions : $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ (diamètre en cm sur les deux portions)
- espaces réalisable : $P = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \, 0 \leq x_1 \leq 40, 0 \leq x_2 \leq 60, 3x_1 + 2x_2 \leq 180\}$.
- fonction objectif : $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 5x_2$

$$\begin{aligned} \max \; & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t.} \; & x_1 \leq 40 \\ & x_2 \leq 60 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 180 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

programme mathématique
2 variables x_1, x_2
objectif et contraintes sont des fonctions linéaires en x_1 et x_2

EXEMPLE 1 : MODÈLE GRAPHIQUE

max $3x_1 + 5x_2$
s.t. $x_1 \leq 40$
$x_2 \leq 60$
$3x_1 + 2x_2 \leq 180$
$x_1, x_2 \geq 0$



- chaque contrainte linéaire définit un demi-plan de l'espace $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$
- les solutions réalisables sont les points du polyèdre ainsi défini
- chaque ligne pointillée est une droite d'équation $3x_1 + 5x_2 = p$ et contient toutes les solutions de score p
- la solution optimale est un sommet du polyèdre situé sur la ligne pointillée la plus *haute*, soit en $(x_1 = 20, x_2 = 60)$ avec $p = 360$

PRÉCISION & APPROXIMATION

prendre une décision

résoudre un modèle

$$\min z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} d_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in N$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in N$$

problème concret $\longrightarrow$ modèle abstrait $\xrightarrow{\text{solve}}$ solution théorique $\longrightarrow$ décision pratique

résoudre un modèle $\neq$ résoudre un problème

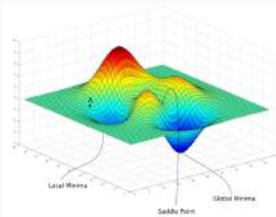
RÉSOUDRE : THÉORIE VS PRATIQUE

modèle $\neq$ problème

- données incertaines (prédiction) et imprécises (tronquées)
- dynamiques/fonctions simplifiées
- objectif conceptuel

résoudre $\min f(x) : g(x) \leq 0$**?**

- tolérance de faisabilité : $g(x) \leq \epsilon$
- tolérance d'optimalité : $f(x) \leq \min f + \epsilon$
- optimum local vs global
- garantie théorique vs pratique : forte complexité, convergence lente, temps limité



algorithmes variés pour des besoins variés

ALGORITHMES D'OPTIMISATION

simulation : **évalue** la faisabilité et le score d'une solution
heuristique : **parcourt et évalue progressivement** quelques solutions
optimisation : parcourt et évalue **(implicitement) toutes** les solutions

2 principes

- generate & test
- divide & conquer

GENERATE & TEST

méthodes numériques et black-box

1. évalue un candidat, 2. choix du prochain candidat

simulate

guess $\xrightarrow[k=0]{}$ x_k → $f(x_k)$ ⟶ stop ?

$k++$

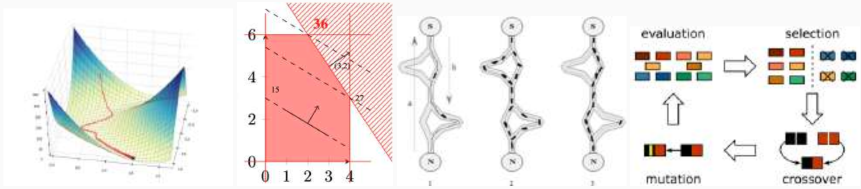
direction/step ?

stratégies de choix : aléatoire, énumération, proximité, direction de descente,...

GENERATE & TEST : EXEMPLES

stratégies de choix : aléatoire, énumération, proximité, direction de descente,...

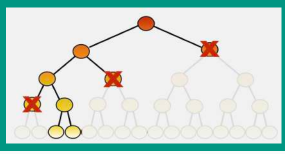
- **méthodes du 1er ordre** (*gradient, simplex*) : direction de descente $f'(x) < 0$
- **recherche locale** : choix du meilleur voisin
- **algorithmes particulaires** (*fourmis*) : mémoire collective
- **algorithmes évolutionnaires** (*génétique*) : reproduction d'une population



DIVIDE & CONQUER

principe

- séparer l'espace de recherche
- résoudre une relaxation / estimer borne
- backtracker ou continuer

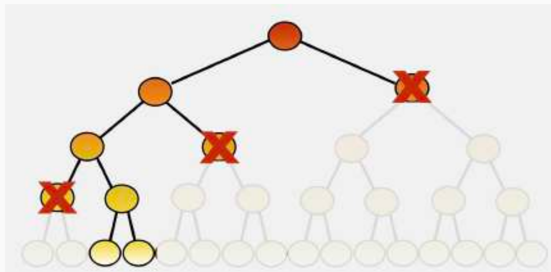


Pour un problème de minimisation :

- **relaxation :** modèle simplifié, rapide à optimiser, donne une borne inférieure
- une solution réalisable donne une borne supérieure
- certificat d'optimalité si les bornes coincident

DIVIDE & CONQUER : EXEMPLES

- **heuristique gloutonne** : pas de backtrack
- **algorithmes de graphe, programmation dynamique**
- **méthodes arborescentes**
- **branch-and-bound** en optimisation combinatoire



EXERCICE 2 : MODÉLISER

la Demande Biochimique en O_2 mesure la pollution de l'eau en masse d'O_2 requise pour biodégrader la matière organique présente dans l'eau

traitement de l'eau [Zhou, Sustainability 2019]

Par jour, deux usines produisent resp. $1200m^3$ (DBO=$850g/m^3$) et $4000m^3$ ($DBO = 400g/m^3$) d'eaux usées. Les systèmes de traitement respectifs ramènent 1 tonne DBO à 100kg et 50kg pour un coût de 400 et 500 euros. La part traitée est rejetée dans la rivière dans la limite autorisée de $DBO = 170kg$. La part non traitée a un coût d'évacuation de 0.56 et 0.25 euro par m^3. Est-il possible de respecter la limite environnemental dans un budget journalier de 1250 euros ?

GESTION DE LA QUALITÉ DE L'EAU

- dairy : traitée : 1 tonne → 100kg DBO = 400 euros, évacuée : 0.56 euros$/m^3$
- beverage : traitée : 1 tonne → 50kg DBO = 500 euros, évacuée : 0.25 euros$/m^3$
- quel volume d'eau traiter pour minimiser DBO dans un budget de 1250 euros ?

- x_1, x_2 : volumes traités (en m^3)
- volumes évacués (en m^3) ? coût (en euros) ?
- volumes : $y_1 = (1200 - x_1)$, $y_2 = (4000 - x_2)$, coût : $0.56 * y_1 + 0.25 * y_2$
- eau traitée : rejet DBO avant (en kg) ? après (en kg) ? coût (en euros) ?
- avant : $r_1 = 850 * x_1 * 10^{-3}$, $r_2 = 400 * x_2 * 10^{-3}$, après : $10\% r_1 + 5\% r_2$
- coût : $400 * r_1 + 500 * r_2$

EXERCICE 2 : MODÈLE PL

- Quel volume d'eau traiter pour minimiser DBO dans un budget de 1250 euros ? La valeur DBO est-elle $\leq 170kg$?
- x_1, x_2 : volumes traités (m^3)

$$
\begin{aligned}
\text{min } & 0.1r_1 + 0.05r_2 \\
\text{s.t. } & 400r_1 + 500r_2 + 0.56(1200 - x_1) + 0.25(4000 - x_2) \leq 1250 \\
& r_1 = 850 * x_1 * 10^{-3} \\
& r_2 = 400 * x_2 * 10^{-3} \\
& 0 \leq x_1 \leq 1200 \\
& 0 \leq x_2 \leq 4000
\end{aligned}
$$