

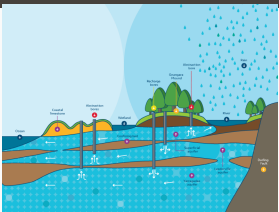
# OPTIMISATION MATHÉMATIQUE : INTRODUCTION ET APPLICATION À LA GESTION DE L'EAU

UCA – Master Hydroprotech

Sophie Demassey (CMA, Mines Paris – PSL)  
sophie.demassey@minesparis.psl.eu <http://sofdem.github.io/>

EXAMEN : MODÉLISATION

## EXTRACTION D'EAU



- coût fixe  $C_j$
- débit fixe  $Q_j$
- débit total  $Q$
- $x_j$  : pompe en  $j \in J$  oui/non?
- coût minimal

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j \in J} C_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in J} Q_j x_j = Q \\ & x_j \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in J \end{aligned}$$

Modéliser les instructions suivantes :

1.  $\forall j \in J$  : débit de pompage variable entre  $\underline{Q}_j$  et  $\bar{Q}_j$
2.  $\forall j \in J$  : coût fixe  $C_j$  d'installation + coût variable linéaire en fonction du débit :  $A_j * \text{debit}$
3. installer entre 2 et 5 pompes
4. débit total en  $j_2$  et  $j_3$  inférieur à  $Q'$
5. si pompe installée en  $j_1$  alors pas de pompe en  $j_2$  et  $j_3$

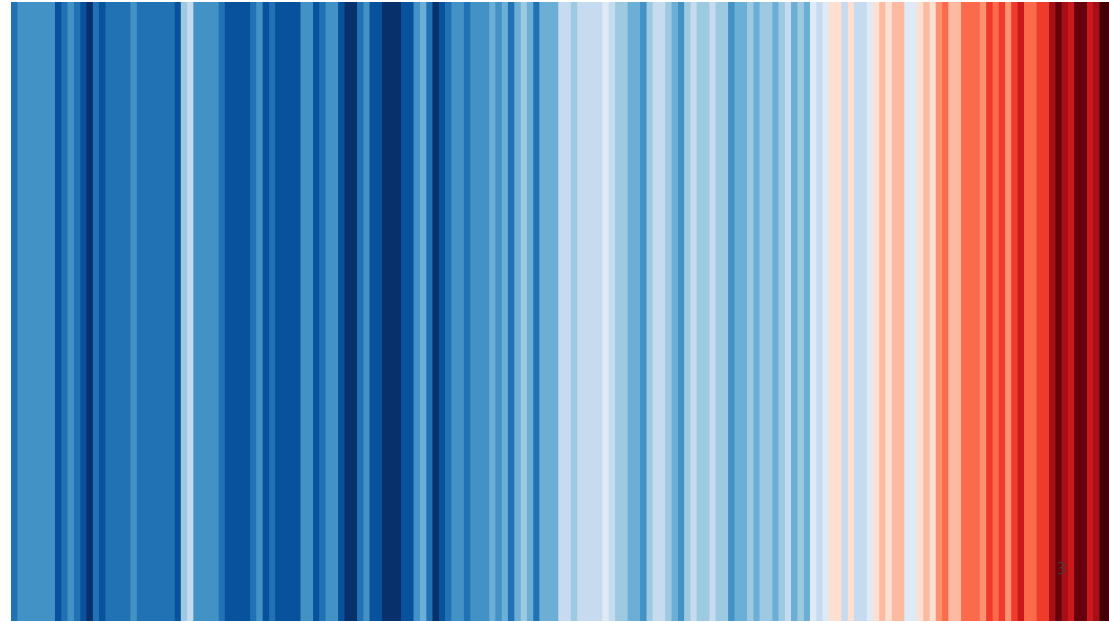
1

## EXERCICE : MODÈLE PLNE

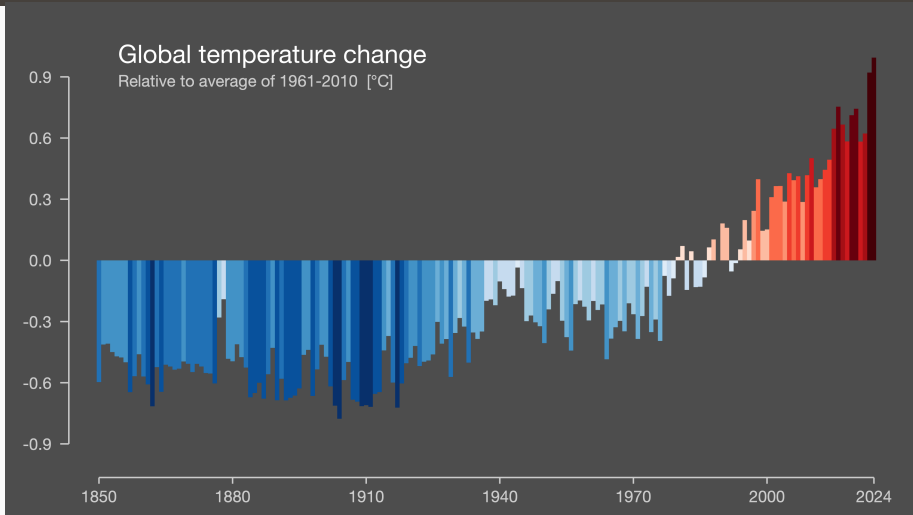
$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j \in J} C_j x_j + A_j q_j \\ \text{s.t.} \quad & \underline{Q}_j x_j \leq q_j \leq \bar{Q}_j x_j \quad \forall j \in J \\ & \sum_{j \in J} q_j = Q \\ & 2 \leq \sum_{j \in J} x_j \leq 5 \\ & q_1 + q_2 \leq Q' \\ & x_2 \leq 1 - x_1, \quad x_3 \leq 1 - x_1 \\ & x_j \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in J \end{aligned}$$

2

# TRANSITION

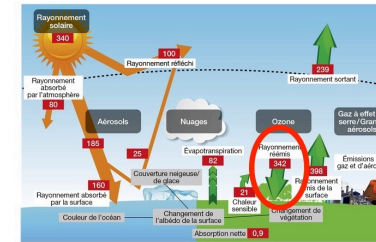


## CHANGEMENT CLIMATIQUE : OBSERVATIONS



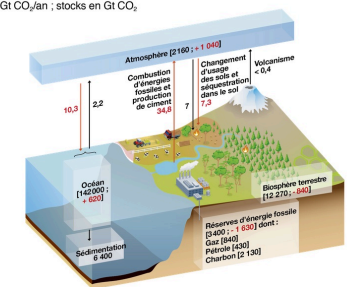
## EFFET DE SERRE : CAUSE DE RÉCHAUFFEMENT

L'EFFET DE SERRE NATUREL ET SES PERTURBATIONS PAR LES ACTIVITÉS HUMAINES  
Flux d'énergie actuels en W/m<sup>2</sup>



Note : le 'Soleil' reçoit en permanence de l'énergie du soleil. La partie de cette énergie qui n'est pas réfléchi par l'atmosphère, notamment les nuages ou la surface terrestre (océans et continents), est absorbée par la surface terrestre qui se réchauffe en l'absorbant. En contrepartie, les surfaces et l'atmosphère émettent du rayonnement infrarouge, d'autant plus intense que les surfaces sont chaudes. Une partie de ce rayonnement est absorbée par certains gaz et par les nuages plus réfléchis vers la surface, ce qui contribue à la réchauffer. Ce phénomène est appelé l'effet de serre.  
Sources : d'après Météo-France ; Giec, 1<sup>er</sup> groupe de travail, 2021 <https://www.statistiques.developpement-durable.gouv.fr> (2022)

RÉSERVOIRS ET FLUX DE GES : EXEMPLE DU CO<sub>2</sub> AU COURS DES ANNÉES 1750-2019 ET 2011-2020  
Flux en Gt CO<sub>2</sub>/an ; stocks en Gt CO<sub>2</sub>

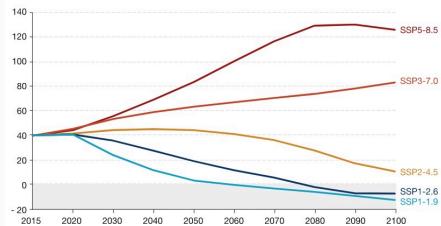


Note : ce graphique présente : (i) entre crochets, la taille des réservoirs aux temps préindustriels en milliards de tonnes de CO<sub>2</sub> en noir et leur variation cumulée sur la période 1750-2019 en rouge ; (ii) sous forme de bâtons, les flux de carbone entre les réservoirs en milliards de tonnes de CO<sub>2</sub> par an (en Gt CO<sub>2</sub>/an). Les flux préindustriels sont en noir. Ceux qui sont liés aux activités anthropiques entre 2011 et 2020 sont en rouge.  
Sources : d'après Giec, 1<sup>er</sup> groupe de travail, 2021 ; Friedegastin et al., Global Carbon Budget 2021, 2022

Peu d'impacts directs de l'activité humaine sur la concentration de la vapeur d'eau, premier gaz à effet de serre (GES), mais beaucoup sur les autres GES, dont le principal émis : le dioxyde de carbone (CO<sub>2</sub>).

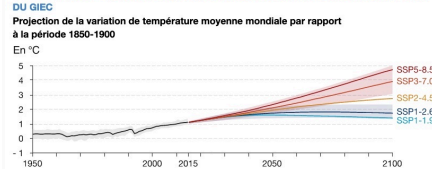
## TRANSITION BAS CARBONE

PROJECTIONS DES ÉMISSIONS DE CO<sub>2</sub> SUIVANT LES CINQ SCÉNARIOS DU GIEC



Note : les derniers nombres (1.9, 2.6, 4.5, 7.0 et 8.5) nommant chaque trajectoire correspondent aux forçages radiatifs induits à l'horizon 2100 par rapport à l'ère préindustrielle, exprimés en W/m<sup>2</sup>.  
Source : Giec, 1<sup>er</sup> groupe de travail, 2021  
<https://www.statistiques.developpement-durable.gouv.fr/> (2022)

ÉVOLUTION DES TEMPÉRATURES ET NIVEAU DES MERS SUIVANT LES CINQ SCÉNARIOS DU GIEC



Source : Giec, 1<sup>er</sup> groupe de travail, 2021  
<https://www.statistiques.developpement-durable.gouv.fr/> (2022)

L'Union européenne s'est fixé l'objectif d'**atteindre la neutralité carbone** en 2050 et de **réduire ses émissions nettes** d'au moins 55% en 2030 par rapport à 1990.

**Décarboner** : réduire les émissions de GES des activités humaines, en priorité dans les premiers secteurs émetteurs : la production d'électricité (42% des émissions CO<sub>2</sub> dans le monde en 2020), les transports (22%), l'industrie (20%).

7

## COMMENT DÉCARBONER ?

- **sobriété** : réduire les besoins
- **efficacité** : réduire les prélèvements de ressources pour satisfaire un besoin
- **durabilité** : augmenter sources renouvelables et recyclage

ex (chauffage résidentiel) : limiter la température de consigne; isoler; énergie solaire vs fossile; co-génération électricité/chaaleur; stockage.

Réponses high/low-tech : **nouvelles technologies** et **meilleurs procédés**  
→ **décider** de nouveaux systèmes et repenser les systèmes existants

ex : réseaux de chaleur / maximiser utilité, nouveaux isolants / minimiser consommation

8

## DÉCISION SOUS OBJECTIF DE DÉCARBONATION

décider comment **concevoir** et **piloter** un système ou un processus

- répondant à un besoin avec un impact minimal
- maximisant une utilité avec un impact limité

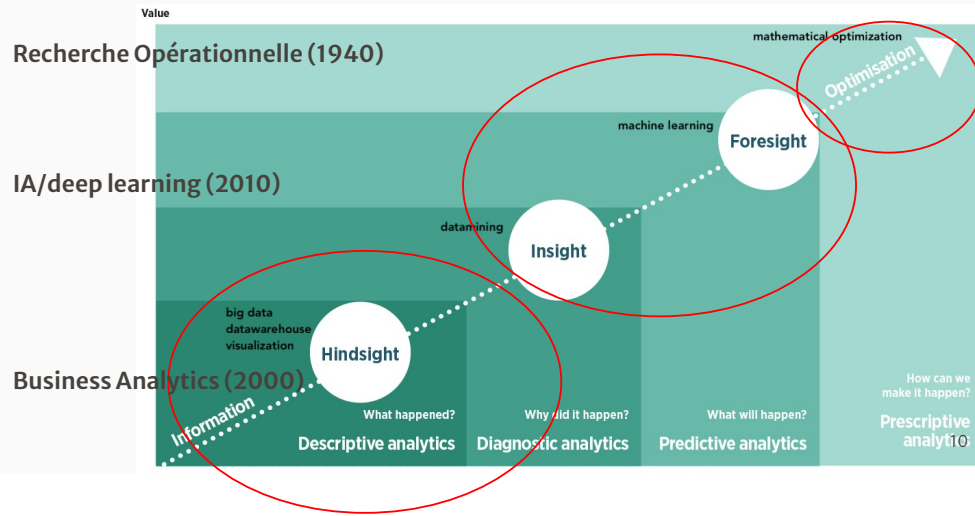
**impact** : consommation de ressources ou émissions

- émissions (carbone ou GES) explicites ou implicites (ex : max sources renouvelables)
- objectifs environnementaux : réduction des polluants (au-delà du carbone) et du prélèvement de ressources

9

## AIDE À LA DÉCISION

# SYSTÈMES D'AIDE À LA DÉCISION



# THE RIGHT TOOL

**diversité** des systèmes et processus... et de notre compréhension des dynamiques :

- description analytique, *ex: Darcy-Weisbach*
- observations et mesures, *ex: suivi des crues*
- inconnus, *ex: biotopes marins*

## simulation ou optimisation? choisir le bon outils

- **simulation numérique** : basé sur un modèle détaillé; mesure faisabilité/coût d'une décision; pas de trouver la meilleure décision
- **simulation+optimisation** : couplage e.g. avec algo génétique ou via reinforcement learning : nombreuses simulations; heuristique
- **apprentissage/machine learning** : nécessite de gros volumes de données; algorithmes énergivores; simulation/prédiction plutôt que optimisation/prescription
- **optimisation mathématique** : nécessite un modèle fiable; algorithmes limités à des modèles simplifiés; évolutif et interprétable

11

# OPTIMISATION COMBINATOIRE (SUITE)

# MODÈLE D'OPTIMISATION LINÉAIRE EN NOMBRES ENTIERS

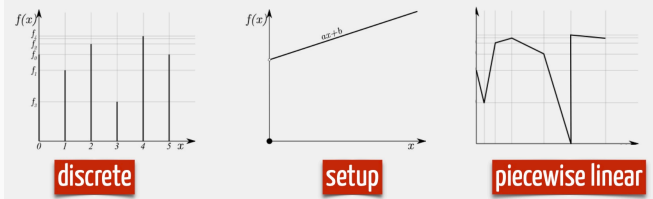
définition : **programme linéaire en nombres entiers (PLNE)**

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, & \forall i = 1, \dots, m \\ & x_j \in \mathbb{R} & \forall j = 1, \dots, p \\ & x_j \in \mathbb{Z} & \forall j = p+1, \dots, n \end{aligned}$$

12

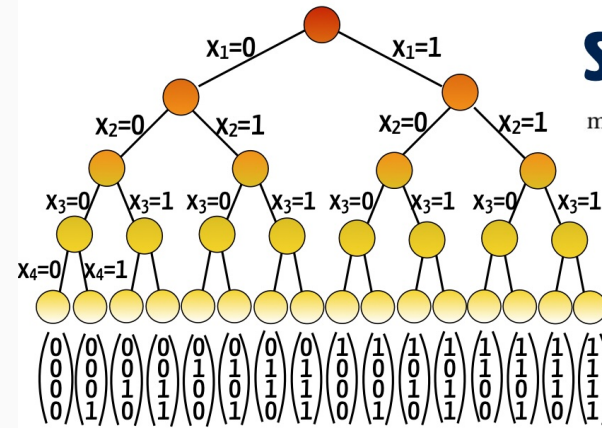
# MODÉLISER AVEC DES VARIABLES DISCRÈTES

- décisions **discrètes**: on/off  $x \in \{0, 1\}$ , niveau  $z \in \{0, 1, \dots, N\}$
- conditions logiques:  $z \leq N(1 - x) \dots$  si  $x = 1$  alors  $z = 0$
- fonctions non-linéaires:



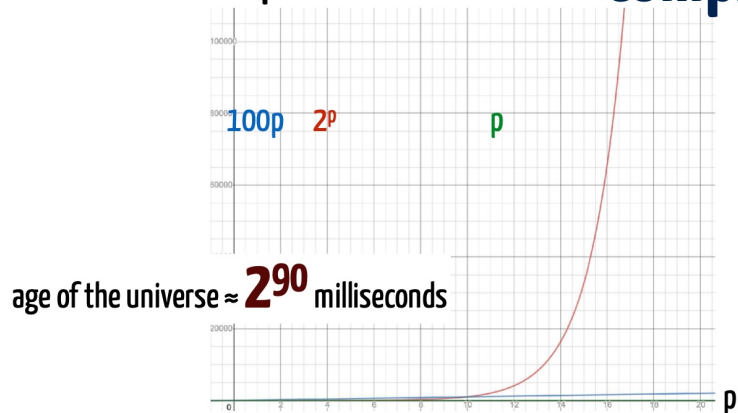
# solving MILP

$$\min\{cx \mid Ax \geq b, x \in \{0, 1\}^p \times \mathbb{R}^{n-p}\}$$



Complete enumeration =  $2^p$  LPs to solve

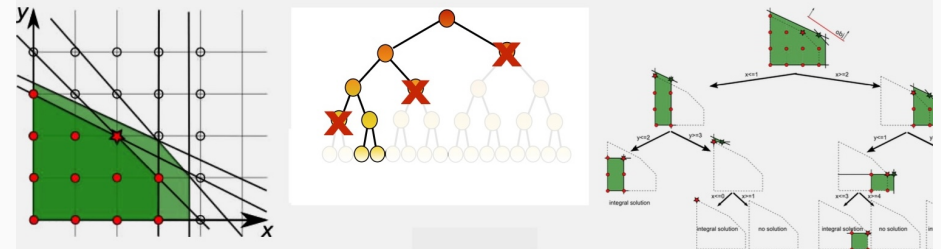
# Combinatorial explosion complexity



# MILP algorithms

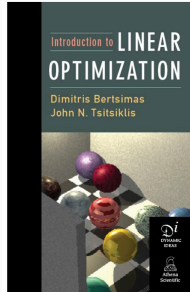
- cutting-plane algorithm
- branch-and-bound
- branch-and-cut

- based on the LP relaxation (ex: simplex algorithm)
- evaluate, refine, iterate
- separate (on discrete variables), estimate, backtrack/iterate
- refine then estimate

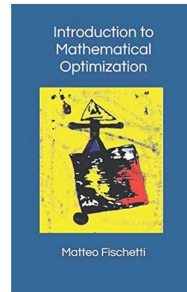


## REFERENCES

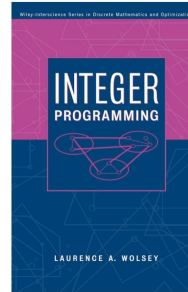
Bertsimas & Tsitsiklis 1997



Fischetti 2019



Wolsey 1998



17

AU-DELÀ DU LINÉAIRE :  
DYNAMIQUES DE L'EAU

---